MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
Sciences
Université Paris Cité

**Licence 3e année, 2021–2022**

# Méthodes Numériques

# Examen du 4 mai 2022

***Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.***

**Tout document est interdit.**
**Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.**

**Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.**

---

On note dans toute la suite $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$.

## Questions de cours

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), n \geq 1$, une matrice inversible. On cherche à résoudre le système linéaire $Ax = b$, où $b \in \mathbb{R}^n$, grâce à la méthode de Jacobi. On rappelle que l'on écrit la décomposition $A = M - N$ et l'itération $x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$ pour $k \geq 0$, $x^{(0)}$ donné.

1. Justifier pourquoi l'on peut toujours supposer $M$ inversible.
2. Pour $1 \leq i \leq n$, écrire $x_i^{(k+1)}$ en fonction des coordonnées de $x^{(k)}$.
3. En déduire la complexité d'une itération de la méthode de Jacobi.

## Exercice 1

Soit $\|.\|$ une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $y \in \mathbb{R}^n$ non nul fixé. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_y = \|x\, y^t\|$.

1. Montrer que $\|.\|_y$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on a $\|Ax\|_y \leq \|A\|\|x\|_y$.
3. Soit $N_y(.)$ la norme induite sur les matrices par $\|.\|_y$, montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $N_y(A) \leq \|A\|$.

## Exercice 2

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P\tilde{A}$.
2. Énoncer et appliquer un résultat du cours qui permet d'affirmer que la matrice $A$ admet une décomposition $LU$ unique avec $L$ triangulaire inférieure ayant des "1" sur la diagonale et $U$ triangulaire supérieure inversible.
   Peut-on affirmer la même chose pour $\tilde{A}$ ?
3. Déterminer la décomposition $A = LU$.

**Exercice 3**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), n \geq 1$, une matrice inversible et $p \geq 2$ un entier. On définit la suite de matrices

$$Q_0 = I_n \qquad Q_{k+1} = Q_k \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} (-1)^j (AQ_k)^j, k \geq 0 \ ,$$

où $I_n$ est la matrice identité et avec la convention $M^0 = I_n$ pour une matrice $M$ non nulle.
On pose $R_k = I_n - AQ_k$.

1. Calculer $AQ_{k+1}$ et $R_k^p$.
2. En déduire $R_{k+1}$ en fonction de $R_k$.
3. Déduire de ce qui précède que $\lim_{k\to+\infty} Q_k = A^{-1}$ si et seulement si $\rho(R_0) < 1$.
   Par $\rho(.)$ on désigne le rayon spectral.
4. Écrire $A^{-1} - Q_{k+1}$ en fonction de $A^{-1} - Q_k$. Déduire que $\|A^{-1} - Q_{k+1}\| \leq C\|A^{-1} - Q_k\|^r$, pour $C > 0$ et $r \in \mathbb{N}^*$ à déterminer.
   Ici $\|.\|$ est une norme matricielle quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Quelle est la complexité de l'algorithme en fonction de $n$ et $p$ ?
6. Que peut-on déduire des deux dernières questions ?

**Exercice 4**

On suppose que l'on possède une fonction Octave `function [x] = SysLinTaille2(A,b)` qui renvoie le vecteur $x$ solution de $Ax = b$ pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible et $b \in \mathbb{R}^2$.

1. On considère une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ réelle carrée de taille $n$ de la forme
   $$M = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & R \end{pmatrix},$$
   où $P$ est une matrice carrée inversible de taille $n_p$, $R$ une matrice carrée inversible de taille $n_r$, et $Q$ une matrice de taille $n_p \times n_r$, avec $n = n_p + n_r$.
   Soit également $y \in \mathbb{R}^n$ quelconque. Montrer que la solution du système linéaire $Mx = y$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^n$, peut être obtenue en résolvant un système linéaire de matrice $R$ puis un système linéaire de matrice $P$.
2. On considère à présent une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$ et pair) de la forme suivante (dite «triangulaire supérieure par blocs de taille 2») :
   $$M = \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & * & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & A_{\frac{n}{2}} \end{pmatrix},$$
   où les $A_i$ ($1 \leq i \leq \frac{n}{2}$) sont des matrices carrées inversibles de taille 2.
   Soit également $y \in \mathbb{R}^n$ quelconque. Expliquer comment il est possible de résoudre de façon récursive le système linéaire $Mx = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^n$ en utilisant les résultats de la question précédente.
   Écrire une fonction Octave (ou pseudo-code) `function [x] = SysLinTriangBlocs(M,y)` qui résout un tel système linéaire de manière récursive et en faisant appel à la fonction `SysLinTaille2`.