MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
Sciences
Université Paris Cité

Licence 3e année, 2022–2023

Méthodes Numériques

Examen du 3 mai 2023

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

On note dans toute la suite $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$.

Questions de cours

Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n), n \geq 1$, une matrice inversible. On cherche à résoudre le système linéaire $Ax = b$, $x, b \in \mathbb{R}^n$ grâce à la méthode de Jacobi. On rappelle que l'on écrit la décomposition $A = M - N$ avec M la matrice diagonale de A et l'itération $x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$ pour $k \geq 0$, $x^{(0)}$ donné. On note $x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ le k-ième itéré et on suppose que M est inversible.

1. Justifier brièvement pourquoi l'on peut toujours supposer M inversible.
2. Pour $1 \leq i \leq n$, écrire $x_i^{(k+1)}$ en fonction de $x_i^{(k)}$.
3. En déduire la complexité d'une itération de la méthode de Jacobi.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

1. Grâce au théorème de Gershgorin, donner un encadrement des valeurs propres de A aussi précis que possible (ne pas tenter de calculer directement les valeurs propres).
2. Déduire l'existence de la factorisation de Cholesky pour la matrice A.
3. Effectuer la factorisation de Cholesky de A par identification de A et LL^t.

Exercice 2

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

1. Calculer spec(A). Déduire pour quelles valeurs de α la matrice A est inversible.

On suppose dans la suite que A est inversible.

2. Pour quelles valeurs de α la matrice A est–elle à diagonale strictement dominante ?
3. Pour quelles valeurs de α la matrice A est–elle symétrique définie positive ?
4. Déterminer la matrice de Jacobi J.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour garantir la convergence de la méthode de Jacobi. Commenter le résultat.

Exercice 3

On note $\|.\|$ la norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ induite par une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$ et l'on note I_n la matrice identité.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|I_n - A\| < 1$. On considère la suite de matrices $(M^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définie par

$$M^{(0)} = I_n \;, \qquad M^{(k+1)} = I_n + (I_n - A)M^{(k)} \;, \text{ pour } k \in \mathbb{N}\,.$$

1. On pose $B = I_n - A$, que peut-on dire de $(I_n - B)^{-1}$?
   Déduire que A est inversible et que $\|A^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \|I_n - A\|}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^{(k)} - A^{-1} = (I_n - A)(M^{(k-1)} - A^{-1})$.
3. Déduire que
   $$\|M^{(k)} - A^{-1}\| \leq \frac{\|I_n - A\|^{k+1}}{1 - \|I_n - A\|}$$
4. En déduire la limite de la suite de matrices $(M^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.
5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^{(k)}$ est inversible.
   Indic. : écrire $M^{(k)}$ sous forme d'un produit de matrices inversibles.
6. Que peut-on dire de la complexité et de la vitesse de convergence de cette méthode ?

Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle inversible, $u, v \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs non nuls.
On note $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $O_{k,l}$ une matrice nulle de k lignes et l colonnes.

1. Calculer par blocs les produits suivants :
   $$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & O_{1,n} \\ u & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -v^t \\ O_{n,1} & I_n + u\,v^t \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} 1 + v^t\,u & -v^t \\ O_{n,1} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O_{n,1} \\ u & I_n \end{pmatrix}.$$
2. Justifier pourquoi $\det(M_1) = \det(M_2)$, calculer ces déterminants et en déduire $\det(I_n + u\,v^t)$.
3. Déduire de ce qui précède que $\det(A + u\,v^t) = (1 + v^t\,A^{-1}u)\det(A)$.
4. On pose $\tilde{A} = A + \alpha e_c\,e_l^t$ où $1 \leq c, l \leq n$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour quelle valeur de α (si elle existe) la matrice $\tilde{A}$ ne sera pas inversible ?
5. Déduire de ce qui précède quelle est la plus petite perturbation d'un coefficient de A qui rend la matrice non inversible.