MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
Sciences
Université Paris Cité

**Licence 3e année, 2023–2024**

# Méthodes Numériques

## Examen du 15 mai 2024

***Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.***

**Tout document est interdit.**
**Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.**

**Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.**

---

On note dans toute la suite $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$.

### Questions de cours

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on utilise $\|.\|_2$, la norme induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

1. Donner la définition du conditionnement de la matrice $A$, pour le problème d'inversion, noté $c_2(A)$.
2. Calculer $c_2(I_n)$.
3. Pour $A$ symétrique, donner $\|A\|_2$ et en déduire $c_2(A)$.

### Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $\|.\|$ une norme matricielle.

1. Pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible quelconque, montrer que $B^{-1} - A^{-1} = -B^{-1}(B - A)A^{-1}$.

Soit $\delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\|A^{-1}\delta A\| < 1$.

2. Justifier que $(I_n + A^{-1}\delta A)$ est inversible et donner une majoration de $\|(I_n + A^{-1}\delta A)^{-1}\|$.
3. Montrer que $A + \delta A$ est inversible et que $\|(A + \delta A)^{-1}\| \leq \dfrac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\delta A\|}$.
4. Déduire de ce qui précède que

$$\|(A + \delta A)^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^2\|\delta A\|}{1 - \|A^{-1}\delta A\|}.$$

5. Commenter le résultat précédent en termes de distance entre $A^{-1}$ et $B^{-1} = (A + \delta A)^{-1}$.

**Exercice 2**

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

1. Calculer spec($A$). Déduire pour quelles valeurs de $\alpha$ la matrice $A$ est symétrique définie positive.

On suppose dans la suite $\alpha$ tel que $A$ est définie positive.

2. Déterminer la matrice de Jacobi $J$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha$ pour que la méthode de Jacobi soit convergente.
4. Déterminer la décomposition de Cholesky, $A = LL^t$, avec $L$ triangulaire inférieure et $l_{ii} > 0$, $1 \leq i \leq 3$ (vérifier vos calculs).
5. Commentez les résultats précédents.

**Exercice 3**

Soit $I_n$ la matrice unité, on écrit $I_n = [e_1\, e_2 \cdots e_n]$ où $e_j$ est le $j^{\text{e}}$ vecteur colonne de la base canonique et l'on construit $P$ en échangeant la $i^{\text{e}}$ et la $j^{\text{e}}$ colonne de $I_n$. Alors le produit $AP$ échange les $i^{\text{es}}$ et $j^{\text{es}}$ colonnes de $A$ et le produit $PA$ échange les $i^{\text{es}}$ et $j^{\text{es}}$ lignes de $A$.

1. Écrire une fonction Octave `function [P]=perm_mat(n,i,j)`, qui détermine la matrice $P \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n)$ qui échange les $i^{\text{es}}$ et $j^{\text{es}}$ lignes, resp. colonnes.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n)$. Écrire une fonction Octave `function [B]=pivot_part(A)` qui détermine la matrice $B$ ne nécessitant plus de pivot partiel de Gauss, c'est-à-dire tel que pour $j = 1, \ldots, n-1$, on a $|B_{jj}| \geq \max\limits_{i=j+1,\ldots,n} |B_{ij}|$.

**Exercice 4**

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $< x, y >$ le produit scalaire euclidien, et $\|x\|_2 =< x, x >^{1/2}= \sqrt{x^t\, x}$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Soit $A$ une matrice réelle carrée de taille $n \geq 2$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $\nu > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x^t\, Ax \geq \nu \|x\|_2^2\,.$$

1. Montrer que $A$ est inversible (considérer $x \in \ker A$).

Pour $\theta \in \mathbb{R}^*$ et $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, on définit, pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$r^{(\mathrm{k})} = Ax^{(\mathrm{k})} - b\,, \quad x^{(\mathrm{k+1})} = x^{(\mathrm{k})} - \theta r^{(\mathrm{k})}\,.$$

On suppose que la suite de vecteurs $(x^{(\mathrm{k})})_{k\in\mathbb{N}}$ admet une limite $x^\star$ : $\lim\limits_{k\to+\infty} x^{(\mathrm{k})} = x^*$.

2. Quelle relation vérifie $x^\star$ et que vaut $\lim\limits_{k\to+\infty} r^{(\mathrm{k})}$ ?
3. Exprimer $r^{(\mathrm{k})}$ grâce à $r^{(\mathrm{k\text{-}1})}$, $A$ et $\theta$. En déduire une relation entre $r^{(\mathrm{k})}$ et $r^{(0)}$.
4. Déduire de ce qui précède que $\lim\limits_{k\to+\infty} x^{(\mathrm{k})} = x^\star$ si et seulement si $\rho(I_n - \theta A) < 1$.
5. Soit $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|u\|_2 = 1$. Développer l'expression
$$\|(I_n - \theta A)u\|_2^2 =< (I_n - \theta A)u\,, (I_n - \theta A)u >\,.$$
Donner une majoration de $\|(I_n - \theta A)u\|_2^2$ indépendante de $u$.
6. Déduire de ce qui précède que $\|(I_n - \theta A)\|_2 < 1$ pour $\theta \in \left]0, \dfrac{2\nu}{\|A\|_2^2}\right[$.
7. Conclure sur la convergence de la suite $(x^{(\mathrm{k})})_{k\in\mathbb{N}}$.