Licence 3e année, 2024–2025

Méthodes Numériques

Examen du 14 mai 2025

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

On note dans toute la suite $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$.

Questions de cours

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on utilise $\|.\|_2$, la norme induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

1. Donner la définition du conditionnement de la matrice A, pour le problème d'inversion, noté $c_2(A)$.
2. Calculer $c_2(I_n)$ et montrer que $c_2(A) \geq c_2(I_n)$.
3. Pour A symétrique, donner $\|A\|_2$ et en déduire $c_2(A)$.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Donner un encadrement des valeurs propres de A aussi précis que possible.
(Ne pas tenter de calculer directement les valeurs propres, mais utiliser un résultat de localisation des valeurs propres).
2. Déduire l'existence de la factorisation de Cholesky pour la matrice A.
3. Effectuer la factorisation de Cholesky de A.
4. Expliquer comment la factorisation de A permet de résoudre le système $Ax = b$,
où $b \in \mathbb{R}^3$ (ne pas faire les calculs).

Exercice 2

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 2 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\operatorname{spec}(A)$. Déduire pour quelles valeurs de α la matrice A est inversible. Déterminer ensuite $\rho(A)$.

On suppose dans la suite que A est inversible.

2. Pour quelles valeurs de α la matrice A est–elle à diagonale strictement dominante ?
3. Que peut-on en déduire sur la convergence de la méthode de Jacobi ?
4. Déterminer la matrice de Jacobi J.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour garantir la convergence de la méthode de Jacobi.
6. Pour quelles valeurs de α la matrice A est–elle définie positive ?

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec A^t à diagonale strictement dominante,

c'est à dire pour $1 \leq j \leq n$, $|a_{jj}| > \displaystyle\sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}| = R_j$.

On va montrer que A admet une factorisation $A = LU$ avec $L = (l_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ triangulaire inférieure et $U = (u_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ triangulaire supérieure, vérifiant les propriétés :

$$(P) \quad l_{ii} = 1, 1 \leq i \leq n,\ |l_{ij}| < 1, 1 \leq j < i \leq n \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} u_{ii} \neq 0.$$

1. Montrer que les hypothèses entrainent que A est inversible et que les a_{jj}, $1 \leq j \leq n$, sont non nuls.
2. Pour $n = 2$, soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ avec $|a_{11}| > |a_{21}|$ et $|a_{22}| > |a_{12}|$.

   Déterminer $c \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   En déduire que les matrices $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifient les propriétés (P).

On va passer au cas général $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$ avec A^t à diagonale strictement dominante.

On considère la décomposition par blocs $A = \begin{pmatrix} a_{11} & w^t \\ v & B \end{pmatrix}$ où $a_{11} \in \mathbb{R}$, $v, w \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

3. Écrire A^t et exprimer grâce à a_{11} et aux coefficients de v, w et B que le fait que A^t est à diagonale strictement dominante.
4. Déterminer $C \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ tel que $\begin{pmatrix} a_{11} & w^t \\ v & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{a_{11}}v & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^t \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$
5. Montrer que C^t est à diagonale strictement dominante.

   (Indic. : déterminer les $|c_{ij}|$, $1 \leq i,j \leq n-1$, et comparer $|c_{jj}|$ à $\displaystyle\sum_{i=1,i\neq j}^{n-1} |c_{ij}|$, $1 \leq j \leq n-1$)
6. Proposer une démonstration par récurrence pour montrer que pour tout $n \geq 2$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec A^t à diagonale strictement dominante, on a la factorisation $A = LU$ avec $L = (l_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ triangulaire inférieure et $U = (u_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ triangulaire supérieure et vérifiant les propriétés (P).