Université Paris–Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Licence 3e année, 2007–2008

Méthodes numériques

Examen du 11 juin 2008

Nombre de pages de l'énoncé : 1 . Durée 1h30.

Tout document ainsi que l'utilisation de tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est interdit. **Justifiez** *vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.*

Question de cours

On note $|||.|||$ la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$. Soit une matrice inversible A de taille $n \times n$, δA une matrice de taille $n \times n$, b et δb des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

On considère le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ solution de $Ax = b$, et δx tel que le vecteur $x + \delta x$ soit solution du problème perturbé : $(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$.

Montrer que :

$$\frac{||\delta x||}{||x + \delta x||} \leq c(A) \left(\frac{|||\delta A|||}{|||A|||} + \frac{||\delta b||}{|||A|||\ ||x + \delta x||} \right)$$

où $c(A)$ est le conditionnement de la matrice A pour le problème d'inversion et par rapport à la norme $|||.|||$.

Interpréter cette inégalité.

Exercice 1. Soit A, une matrice réelle carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, que l'on suppose inversible.

On considère la suite de matrices $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définie par

$$\begin{cases} A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A_{k+1} = A_k(I + E_k) \quad \text{pour } k \geq 0 \end{cases} \qquad (*)$$

où I est le matrice identité d'ordre n et $E_k = I - A \cdot A_k \ \ (k \geq 0)$.

1. Exprimer E_k en fonction de E_{k-1}. Montrer que pour tout $k \geq 0$ on a $E_k = {E_0}^{2^k}$.
2. Trouver une condition sur E_0 qui entraîne que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers A^{-1}.
3. Discuter les avantages et inconvénients de la méthode proposée.

Exercice 2.

Faire la décomposition LU de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 3.

Dans Scilab, on suppose définie la fonction `f`.

Écrire une fonction Scilab `int_rect(a,b,f)` qui calcule l'intégrale de `f` sur $[a, b]$ par la méthode des rectangles à droite.