Université Paris–Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 3^{e} année, 2007–2008

Méthodes numériques

Examen du 19 mai 2008

Nombre de pages de l'énoncé : 1 . Durée 1h30.

Tout document ainsi que l'utilisation de tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est interdit. *Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.*

Question de cours

On note $|||.|||$ la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$. Soit une matrice inversible A de taille $n \times n$, δA une matrice de taille $n \times n$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

On considère le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ solution de $Ax = b$, et δx tel que le vecteur $x + \delta x$ soit solution du problème perturbé : $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$.

Montrer que :

$$\frac{||\delta x||}{||x+\delta x||} \leq c(A) \frac{|||\delta A|||}{|||A|||}$$

où $c(A)$ est le conditionnement de la matrice A pour le problème d'inversion et par rapport à la norme $|||.|||$.

Interpréter cette inégalité.

Exercice 1. On veut résoudre le système linéaire tridiagonal $A\,x = y$ dans $\mathbb{R}^n$, où

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ 0 & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & & & & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

On pose $a_1 = c_n = 0$ et on suppose que les a_i, b_i et c_i sont tels que les calculs qui suivent ne donnent pas de division par zéro.

1. Montrer par récurrence que $x_i = A_i x_{i+1} + B_i$ pour $i = 1, \ldots, n-1$.
   Déterminer, en fonction des a_i, b_i, c_i et y_i, les réels A_i et B_i pour $i = 1, \ldots, n-1$.
2. Montrer que $x_n = B_n$.
3. En utilisant ce qui précède, écrire une fonction Scilab `[x]=resol_tri(A,y)` de résolution d'un système tridiagonal. Prévoir des tests pour éviter les divisions par zéro.
4. Donner le nombre d'opérations. Comparer aux méthodes vus en cours.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \, dx$.

1. Utiliser la méthode des rectangles à gauche, avec $N+1 \in \mathbb{N}^*$ points équirépartis sur $[0,1]$ pour calculer I_n grâce à une fonction Scilab `I = int_equi(n,N)` .
   Quel est le nombre d'opérations nécessaires ?
2. Calculer I_0 et I_1. Exprimer I_n en fonction de I_{n-1}.
   En déduire une fonction Scilab `I = int_iter(n)` qui calcule I_n par récurrence sur n.
   Quel est le nombre d'opérations nécessaires ?

Exercice 3. On pose $f(x) = x^2 - 5$.

1. Écrire la méthode de Newton appliquée à f.
2. Montrer que pour toute valeur initiale $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, la suite des itérées définie en 1. est convergente. Quelle est cette limite ?