UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 3e année, 2011–2012

MÉTHODES NUMÉRIQUES

Partiel du 3 avril 2012

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours

1. Donner la définition de l'ordre de convergence d'une méthode itérative $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$.
2. Expliquez la méthode de Newton et énoncez le théorème de convergence associé.

Exercice 1.

On se propose de résoudre l'équation $P(x) = 0$, où $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$.
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $P(\alpha) = b_0$ et $P_1(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \ldots + b_2 x + b_1$
où P_1 vérifie la relation $P(x) = (x-\alpha)P_1(x) + b_0$.

1. Écrire l'équation itérative de la méthode de Newton pour l'équation $P(x) = 0$.
2. Écrire l'algorithme de Horner permettant le calcul de $P(\alpha)$ pour un réel quelconque α.
3. Comment peut-on calculer $P'(\alpha)$?
4. Écrire une fonction Scilab `x=poly_newton(x0,P)` pour résoudre l'équation $P(x) = 0$. En entrée on donne la valeur initiale `x0` et le polynôme `P`, en sortie on obtient une valeur approchée de x.
   On pourra utiliser les fonctions Scilab `poly`, `coeff` et `horner`.

Exercice 2.

On considère la formule d'intégration numérique qui consiste à approximer $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ par

$$\mathcal{Q}(f) = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(x_1)$$

où α_0, α_1, et x_1 sont des réels.

1. Montrer que l'ordre de cette formule est au maximum égal à 2.
   (Indic. : on pourra considérer le polynôme $f(x) = x(x-x_1)^2$)
2. Déterminer les réels α_0, α_1, et x_1, pour que la méthode soit d'ordre le plus élevé possible.
3. Expliciter la méthode ainsi définie.

Exercice 3.

Soit f une fonction réelle suffisamment dérivable sur $[a, b]$.
On va résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $[a, b]$ par méthode de point fixe et l'on s'intéresse à l'ordre des méthodes utilisées.

On rappelle qu'une racine x^* de f est de multiplicité $p \geq 1$ si f peut s'écrire $f(x) = (x - x^*)^p h(x)$ où $\lim\limits_{x \to x^*} h(x) = h(x^*) \neq 0$.

On montre alors que $f^{(i)}(x^*) = 0$ pour $i = 0, 1, \ldots, p-1$.

1. Soit la méthode itérative donnée par $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, $n \geq 0$, $x_0 \in [a, b]$; Φ étant suffisamment dérivable.
   On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x^*$ et l'on pose $e_n = x_n - x^*$ pour $n \geq 0$.
   Exprimer e_{n+1} en fonction de e_n, de Φ et de ses dérivées au point x^*.
   Que peut-on dire de l'ordre de la méthode itérative si $\Phi'(x^*) \neq 0$?

2. On suppose que f a une racine simple unique $x^* \in]a, b[$.
   (a) On cherche une méthode itérative de la forme
   $$x_{n+1} = \Phi_A(x_n) = x_n - A(x_n) f(x_n).$$
   Déterminer la fonction A pour que la méthode soit d'ordre 2.
   Quelle méthode itérative obtient-on ?
   (b) On cherche une méthode itérative de la forme
   $$x_{n+1} = \Phi_B(x_n) = \Phi_A(x) - B(x_n) f(x_n)^2$$
   où Φ_A est la fonction trouvée en 2.(a).
   Déterminer la fonction B pour que la méthode soit d'ordre 3 au moins.

3. On suppose que f a une racine unique $x^* \in]a, b[$ mais que cette racine est multiple d'ordre $p \geq 2$.
   (a) Que deviennent les méthodes précédentes ?
   (b) On pose $k(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Montrer que $k(x^*) = 0$ et $k'(x^*) = \dfrac{1}{p}$.
   (Indic. : écrire le développement limité de f, f' et f'' au voisinage de x^*)
   (c) On pose $g(x) = |f(x)|^{\frac{1}{p}}$.
   Montrer que g est définie et continue sur $[a, b]$. Calculer g'.
   Écrire la méthode de Newton pour la résolution de $g(x) = 0$, montrez que l'on se ramène à la méthode de Newton pour $k(x) = 0$. Conclure.
   (d) Déduire de ce qui précède une méthode d'ordre deux pour résoudre $f(x) = 0$.