Licence 3^{e} année, 2015–2016

Méthodes Numériques

Partiel du 15 mars 2016

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours

Soit $\|.\|$ une norme vectorielle sur $\mathbb{R}^d$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner une définition de la norme matricielle subordonnée que l'on notera aussi $\|.\|$.

2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$.

3. Démontrer que cette norme sur les matrices est compatible avec la multiplication matricielle.

Exercice 1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire telle que

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad |a_{ii}| > \sum_{1 \leq j \neq i \leq n} |a_{ij}|$$

1. Soit $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $Au = 0$ et $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|u_{i_0}| = \|u\|_\infty$. Démontrer que

$$|a_{i_0 i_0}||u_{i_0}| \leq \sum_{1 \leq j \neq i_0 \leq n} |a_{i_0 j}||u_{i_0}|$$

(Indic. : Considérer une coordonnée du vecteur Au)

2. En déduire que A est nécessairement inversible.

Exercice 2.
Soit $\tilde{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$.
On suppose qu'il existe une matrice carrée réelle inversible P telle que $\tilde{A} = PAP^{-1}$
où A est diagonale par blocs et de la forme $A = \begin{pmatrix} I_p & O_{p,q} \\ O_{q,p} & B \end{pmatrix}$.

Avec I_p la matrice identité de taille p, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et $p + q = n$.
Par $O_{k,l}$ on désigne une matrice de zéros de taille `[k,l]`.

On suppose par ailleurs que $\text{spec}(B) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$ avec $|\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_q| < 1$.

1. Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} B^k$.

2. Montrer que $\text{spec}(A) = \{1\} \cup \text{spec}(B)$. En déduire $\rho(A)$.
   (Indic. : Pour v vecteur propre de A, considérer une décomposition en blocs adaptée)

3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer par récurrence A^k. En déduire $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k$.

4. Déduire de ce qui précède $\tilde{A}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, et $\lim\limits_{k \to +\infty} \tilde{A}^k$.
   Donner une représentation de cette limite grâce à une décomposition en blocs adaptée de P et de P^{-1}.

5. Sous quelle condition la matrice $\tilde{A}$ est-elle inversible ?
   Calculer alors $\tilde{A}^{-1}$.

Exercice 3.
Soit I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et A une matrice carrée d'ordre n, symétrique définie positive, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$.
On veut déterminer la solution x^* du système linéaire $Ax = b$ pour n grand. Pour cela, on définit dans $\mathbb{R}^n$ la suite :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné ;} \\ x^{(\text{k})} = (I_n - \sigma A)x^{(\text{k-1})} + \sigma b, k \geq 1, \end{cases}$$

où $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ est un paramètre réel vérifiant $0 < \sigma < 2/\lambda_n$.

1. Montrer que $x^{(\text{k})} = \left(\sum\limits_{i=0}^{k-1} (I_n - \sigma A)^i \right) \sigma b + (I_n - \sigma A)^k \, x^{(0)}$.

2. Montrer que $\rho(I_n - \sigma A) < 1$.

3. Déterminer $\lim\limits_{k \to +\infty} (I_n - \sigma A)^k$ et $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} (I_n - \sigma A)^i$.

4. Déduire que $\lim\limits_{k \to +\infty} x^{(\text{k})} = x^*$ pour tout $x^{(0)}$.

5. Exprimer $x^{(\text{k})} - x^*$ en fonction de $x^{(\text{k-1})} - x^*$ et de $I_n - \sigma A$.
   En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une norme vectorielle $\|.\|_\varepsilon$ telle que

$$\|x^{(\text{k})} - x^*\|_\varepsilon \leq (\rho(I_n - \sigma A) + \varepsilon)^k \, \|x^{(0)} - x^*\|_\varepsilon \, .$$