UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 3e année, 2012–2013

MÉTHODES NUMÉRIQUES

Partiel du 21 mars 2013

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours

On considère le problème de Cauchy autonome $\begin{cases} y'(t) &= f(y(t)) \quad \text{pour } a \leq t \leq b \\ y(a) &= y_0 \end{cases}$

pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitzienne et $y_0 \in \mathbb{R}$ donné.

1. Décrire le schéma d'Euler pour résoudre cette équation.
2. Écrire la consistance pour le schéma d'Euler (pas de démonstration).

Exercice 1.

1. Donner une fonction g tel que
$$x^3 + 4x - 1 = 0 \iff g(x) = x$$
2. En déduire qu'il existe un unique point fixe x^* dans $[0, \frac{1}{4}]$ solution de $x^3 + 4x - 1 = 0$.
3. Déterminer une suite (x_n) convergeant vers x^* et donner une majoration de $|x_n - x^*|$.
4. Écrivez un code Scilab affichant la suite (x_n).

Exercice 2.

1. Soit $g : [-1, +1] \to \mathbb{R}$ continue, on veut calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{+1} g(x)\,dx$ grâce à
$$I_\alpha(g) = \frac{2}{3}\Big(g(-\alpha) + g(0) + g(\alpha)\Big) \qquad (*)$$
Déterminer $\alpha \in]0, 1[$ pour que la formule de quadrature I_α soit d'ordre le plus élevé possible.
2. On considère $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et l'on veut calculer $J = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.
Pour $N \in \mathbb{N}^*$, soit $h = (b - a)/N$ et $x_i = a + ih$, $0 \leq i \leq N$.
En utilisant un changement de variable affine, approximer $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ grâce à $(*)$.
En déduire une formule de quadrature pour J.
Que peut-on dire sur l'ordre de cette méthode ?

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$.
On fait les hypothèses suivantes :
(i) $f([a,b]) \subset [a,b]$
(ii) $\exists!\, \xi \in [a,b]$ tel que $f(\xi) = \xi$
(iii) $f^{(l)}(\xi) = 0$, $l = 1, \dots, n$
(iv) $f^{(n+1)}(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$.

On se propose de calculer numériquement ξ par la méthode du point fixe.
On génère la suite x_k comme suit

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_{k+1} = f(x_k),\ k = 0, \ldots \end{cases}$$

1. Pour tout $z \in [a,b]$, montrer qu'il existe $\theta \in]a,b[$ tel que
$$f(z) = f(\xi) + \frac{(z-\xi)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta)\ .$$
2. Montrer que pour tout $x, y \in [a,b]$:
$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y| \qquad \text{où } L = \frac{(b-a)^n}{n!} \max_{\theta \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\theta)|\ .$$
(Indic. : on pourra appliquer le théorèmes des accroissements finis)
3. Sous quelle condition f est contractante sur $[a,b]$?
En déduire alors que $x_k \to \xi$ quand $k \to +\infty$.
4. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que
$$|x_{k+1} - \xi| \leq C \cdot |x_k - \xi|^{n+1}\ .$$
5. *Application.*
On considère la fonction
$$f(x) = -4\,\arctan(\cos(x)), \qquad \text{pour } x \in I = [3.1, 3.2]\ .$$
   (a) Vérifier que $\xi = \pi$ est un point fixe de f dans I.
   Donner n pour lequel (iii) et (iv) sont vérifiées.
   (Indic. : $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *)*
   (b) Donner une valeur de k qui garantit une erreur $|x_k - \pi|$ inférieure à 10^{-100}.