Licence 3^e^ année, 2014–2015

Méthodes Numériques

Partiel du 24 mars 2015

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.
Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours
Soit $\|.\|_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.

1. Donner la définition de la norme matricielle induite que l'on notera aussi $\|.\|_2$.
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\|Ax\|_2 \le \|A\|_2 \, \|x\|_2$.
3. Démontrer que cette norme sur les matrices est compatible avec la multiplication matricielle.

Exercice 1.
Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n), n \ge 1$, une matrice inversible. On définit la suite de matrices

$$Q_0 = I_n \qquad Q_{k+1} = 2Q_k - Q_k A Q_k, k \ge 0 \ ,$$

où I_n est la matrice identité. On pose $R_k = I_n - AQ_k$.

1. Montrer que $AQ_{k+1} = 2AQ_k - (I_n - R_k)^2$.
2. Montrer que $R_{k+1} = R_k^2$.
3. Déduire de ce qui précède que $\lim\limits_{k \to +\infty} Q_k = A^{-1}$ quand $\rho(R_0) < 1$.
   Où $\rho(.)$ désigne le rayon spectral.

Exercice 2.
Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$, pour $i \ne j \in \{1, \ldots, n\}$ on définit

$$\Omega_{ij} = \{z \in \mathbb{C} \, ; \ |a_{ii} - z||a_{jj} - z| \le R_i R_j\} \subset \mathbb{C}, \quad \text{où } R_i = \sum_{1 \le k \ne i \le n} |a_{ik}| \, .$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $v = (v_1 \cdots v_n)^t \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tels que $Av = \lambda v$.
   Montrer que pour tout $1 \le i \le n$: $(\lambda - a_{ii}) v_i = \sum_{1 \le j \ne i \le n} a_{ij} v_j$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tels que $Av = \lambda v$, on suppose dans cette question que v a une seule composante non nulle : $v_p \in \mathbb{C}^*$ et $v_i = 0$ pour $1 \le i \ne p \le n$.
   Déduire en un premier temps la valeur de λ et ensuite que $\lambda \in \Omega_{pj}$, pour tout $j \ne p$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tels que $Av = \lambda v$, on suppose dans cette question que v admet au moins deux composantes non nulles v_p et v_q, $1 \leq p \neq q \leq n$ avec $|v_p| \geq |v_q| \geq |v_i|$, $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{p, q\}$. Montrer alors que
$$|\lambda - a_{pp}| \leq R_p \frac{|v_q|}{|v_p|} \qquad \text{et} \qquad |\lambda - a_{qq}| \leq R_q \frac{|v_p|}{|v_q|}\,.$$
En déduire que $\lambda \in \Omega_{pq}$.
4. Déduire de ce qui précède que $\operatorname{spec}(A) \subset \displaystyle\bigcup_{1 \leq i \neq j \leq n} \Omega_{ij}$.

Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n), n \geq 1$ une matrice tridiagonale réelle :

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ 0 & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & & & & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}, \text{ on pose } \Delta_k = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ 0 & & & & a_{k-1} & b_{k-1} & c_{k-1} \\ 0 & & & & 0 & a_k & b_k \end{pmatrix}$$

pour $1 \leq k \leq n$.

1. On considère la suite réelle $(\delta_k)_{0 \leq k \leq n}$ définie de la manière suivante
$$\delta_0 = 1,\ \delta_1 = b_1 \ \text{ et, pour } k \geq 2,\ \delta_k = b_k \delta_{k-1} - a_k c_{k-1} \delta_{k-2}.$$
Montrer que pour $1 \leq k \leq n$, on a $\delta_k = \det(\Delta_k)$.
2. A quelle condition portant sur les $(\delta_k)_{1 \leq k \leq n}$, la matrice A possède-t-elle une décomposition LU ?
3. Vérifier que dans ce cas une telle décomposition est alors donnée par
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ \frac{a_2}{r_1} & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \frac{a_3}{r_2} & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 0 \\ 0 & & & \frac{a_{n-1}}{r_{n-2}} & 1 & 0 \\ 0 & & & 0 & \frac{a_n}{r_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} r_1 & c_1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & r_3 & c_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 \\ & & & & r_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & & & 0 & 0 & r_n \end{pmatrix}$$
où l'on a noté $r_k = \dfrac{\delta_k}{\delta_{k-1}}$.
4. Écrire une fonction `[L,U] = lu_tridiag(A)` qui renvoie la décomposition LU d'une matrice tridiagonale A en s'appuyant sur ce qui précède.
Note : on pourra utiliser les commandes `diag(A)`; `diag(A, 1)` qui extrait la 1re sur-diagonale, resp. crée une matrice avec la 1re sur-diagonale donnée et la commande `diag(A, -1)` qui s'adresse à la 1re sous-diagonale.
5. Combien d'opérations élémentaires sont nécessaires à cet algorithme ? Comparer avec l'algorithme général de la décomposition LU.