UFR de Mathématiques et Informatique

45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 3^{e} année, 2013–2014

Méthodes Numériques

Partiel du 7 mars 2014

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.
Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours
Afin de résoudre numériquement l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), t \in [0, T] \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

on considère un schéma à un pas :

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné,} \\ y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n) \text{ pour } n = 0, \ldots, N-1. \end{cases}$$

1. Écrire les définitions de stabilité et consistance.
2. Montrer qu'un schéma stable et consistant est convergent.

Exercice 1.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de classe $\mathcal{C}^3$. Pour $t \in [0, T]$, on considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Pour $h > 0$ et $Nh = T$, on considère le schéma numérique explicite

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné,} \\ y_{n+1} = y_n + hF(y_n, h) \text{ pour } n = 0, \ldots, N-1, \end{cases}$$

où

$$F(y, h) = Af(y) + Bf\Big(y + \beta h f(y)\Big) + Cf\Big(y + hf(y + hf(y))\Big)$$

et avec A, B, C, β des constantes positives.

1. Montrer que le schéma est stable. Pour quelles valeurs de A,B et C ce schéma est-il consistant ?

2. Montrer que le développement de Taylor de $\mathcal{G}(h) = f\Big(y + \beta h f(y)\Big)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 est :
$$\mathcal{G}(h) = f(y) + \beta h f(y) f'(y) + \frac{1}{2}\beta^2 h^2 f(y)^2 f''(y) + O(h^3).$$

3. On définit la fonction $\mathcal{F}$, pour $h \in \mathbb{R}$, par $\mathcal{F}(h) = f\Big(y + hf(y + hf(y))\Big)$.
   (a) Calculer $\mathcal{F}'(h)$ et $\mathcal{F}''(h)$.
   (b) En déduire que le développement de Taylor de $\mathcal{F}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 est :
$$\mathcal{F}(h) = f(y) + hf(y)f'(y) + h^2\left(\frac{1}{2}f(y)^2 f''(y) + f(y)f'(y)^2\right) + O(h^3).$$
4. Déduire, grâce à ce qui précède, une expression de la forme
$$hF(y,h) = hX + h^2Y + h^3Z + O(h^4),$$
   où X, Y, Z sont indépendants de h et seront calculés explicitement.
5. Soit $y(t)$ la solution unique de (1). Ecrire le développement de Taylor à l'ordre 3 de $y(t+h)$ pour h proche de 0.
6. Écrire l'erreur de consistance e_n au point t_n $(0 \leq n \leq N-1)$.
   En utilisant ce qui précède, trouver un système de 4 équations pour les 4 inconnues A, B, C et β, de façon à obtenir un schéma d'ordre 3.
7. Résoudre le système et déterminer explicitement A, B, C et β.

Exercice 2.

On considère le système dynamique de Lorentz $(L)\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & a(y-x) \\ y'(t) & = & x(b-z)-y \\ z'(t) & = & xy - cz \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}_+$
avec $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ et $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$.

On va résoudre numériquement le système (L) sur l'intervalle $[0, T]$ avec un pas constant h.

1. Écrire (L) sous la forme $X'(t) = F(X(t))$ où $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
2. Écrire une fonction Scilab `Y = F(X)` qui permet de définir le système (L).
3. Écrire une fonction Scilab `[Y] = rk4(Y0,h,T,F)` en utilisant le schéma classique de Runge-Kutta :
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\Big(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4\Big)$$
   avec $k1 = F(y_n)$, $k2 = F(y_n + h/2 * k1)$, $k3 = F(y_n + h/2 * k2)$ et $k4 = F(y_n + h * k3)$.

   L'entrée $Y0 = (x_0, y_0, z_0)$ est la condition initiale et la sortie `Y` va contenir tous les points (x_n, y_n, z_n) pour $n = 0, \ldots, N$.