UFR
DE MATHÉMATIQUES
ET INFORMATIQUE

UNIVERSITÉ
PARIS
DESCARTES

Licence 3$^{\text{ème}}$ année, 2016–2017

MÉTHODES NUMÉRIQUES

Partiel du 14 mars 2017

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours

Soit $\|.\|$ une norme (vectorielle) sur $\mathbb{R}^d$.

1. Donner la définition de la norme matricielle induite que l'on notera aussi $\|.\|$.
2. Démontrer que cette norme sur les matrices est compatible avec la multiplication matricielle.

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Nous supposons que A est *strictement diagonalement dominante*, c'est-à-dire que

$$\delta := \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\{ |a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\} > 0 \,.$$

1. Montrer que $\forall w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq 0_{\mathbb{R}^n}$,
$$||Aw||_\infty \geqslant ||w||_\infty \delta \,.$$
2. En déduire que A est inversible.
3. Montrer alors que
$$||A^{-1}||_\infty \leqslant \delta^{-1} \,.$$

Exercice 2

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit une matrice $\tilde{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que le rayon spectral vérifie $\rho(\tilde{A}) < 1$. Montrer qu'il existe une constante $C(\tilde{A}) \in \mathbb{R}_+^*$ qui ne dépend que de la matrice $\tilde{A}$, telle que
$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, 1 \leqslant i,j \leqslant n : \left|(\tilde{A}^k)_{ij}\right| \leqslant C(\tilde{A})$$
où $(\tilde{A}^k)_{ij}$ désigne l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne de $\tilde{A}^k$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice quelconque et soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe une constante $C(A,\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*$ qui ne dépend que de A et de ε telle que
$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, 1 \leqslant i,j \leqslant n : \left|(A^k)_{ij}\right| \leqslant C(A,\varepsilon)(\rho(A)+\varepsilon)^k$$
où $(A^k)_{ij}$ désigne l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne de A^k.
3. Pour $a > 1$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Que vaut $\rho(A)$?
   (a) Déterminer A^k, $k \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Montrer que l'inégalité du point 2. n'est pas vérifiée pour $\varepsilon = 0$.

Exercice 3

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ une matrice carrée réelle inversible de taille 2, et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Écrire la solution générale du système linéaire $Ax = b$ d'inconnue $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, puis écrire une fonction Scilab `function x = SysLinTaille2(A,b)` qui renvoie le vecteur x en fonction de A et b.
2. On considère une matrice M réelle carrée de taille n de la forme
$$M = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & R \end{pmatrix},$$
où P est une matrice carrée inversible de taille n_p, R une matrice carrée inversible de taille n_r, et Q une matrice de taille $n_p \times n_r$, avec $n = n_p + n_r$. Soit également $y \in \mathbb{R}^n$ quelconque. Montrer que la solution du système linéaire $Mx = y$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^n$, peut être obtenue en résolvant un système linéaire de matrice R puis un système linéaire de matrice P.
3. On considère à présent une matrice M carrée réelle de taille n ($n \geqslant 2$ et pair) de la forme suivante (triangulaire supérieure par blocs de taille 2) :
$$M = \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & * & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & A_{n/2} \end{pmatrix},$$
où les A_i sont des matrices carrées inversibles de taille 2. Soit également $y \in \mathbb{R}^n$ quelconque Expliquer comment il est possible de résoudre de façon récursive le système linéaire $Mx = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^n$ en utilisant les résultats des questions précédentes. Écrire une fonction Scilab `function x = SysLinTriangBlocs(M,y)` qui résoud un tel système linéaire de manière récursive et en faisant appel à la fonction `SysLinTaille2`.