Licence $3^{\text{ème}}$ année, 2017–2018

Méthodes Numériques

Partiel du 12 mars 2018

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Questions de cours

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire que $a_{ij} = 0$ pour $1 \leqslant j < i \leqslant n$. On considère le système linéaire $Ax = b$ où $b, x \in \mathbb{R}^n$,

1. Sous quelle condition ce système admet-il une solution unique ?
2. Donner l'algorithme de résolution de $Ax = b$.
3. Quel est le coût en opérations élémentaires $(+,-,\cdot,/)$ de cet algorithme ? faire les calculs et expliquer.

Exercice 1

Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $B(a_{ii}, R_i) \subset \mathbb{C}$ la boule fermée de centre a_{ii} et de rayon $R_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$

et on note $G(A)$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par $G(A) = \bigcup_{i=1}^{n} B(a_{ii}, R_i)$.

Soit $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$ et $v \neq 0$ tel que $Av = \lambda v$, on note $p \in \{1, \dots, n\}$ l'indice, non nécessairement unique, tel que $\|v\|_\infty = |v_p|$.
On suppose que λ vérifie les inégalités : $\quad |a_{ii} - \lambda| \geqslant R_i,$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

1. Que peut-on dire de la position de λ par rapport à $G(A)$?
2. Montrer que pour tout indice $k \in \{1, \dots, n\}$ vérifiant $|v_k| = \|v\|_\infty$ on a $|a_{kk} - \lambda| = R_k$. *(Indic. : écrire que $(Av)_i = \lambda v_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$)*
3. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $\mathrm{spec}(A)$.
   (b) Tracer l'ensemble $G(A)$ et placer les valeurs propres de A.
   (c) Déterminer $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $Av = 0$. Que peut-on dire des $|v_i|$, $1 \leqslant i \leqslant 3$? de $\|v\|_\infty$?

Exercice 2
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible.

1. Écrire une fonction Scilab `[x]=normeinfinie(A)` qui calcule $\|A\|_\infty$. Comment en déduire $\|A\|_1$, $c_\infty(A)$ et $c_1(A)$?
2. On suppose que $n = 2$ et on note $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.
   Calculer A^{-1} ainsi que $\|A^{-1}\|_\infty$ et $\|A^{-1}\|_1$. En déduire que $c_\infty(A) = c_1(A)$.
3. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Calculer A^{-1} ainsi que $c_\infty(A)$ et $c_1(A)$. Conclusion ?

Exercice 3
Soit $\|.\|$ une norme matricielle, induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par une norme sur $\mathbb{R}^n$, notée aussi $\|.\|$, $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner une condition sur A pour que la série réelle positive $\sum_{k=0}^{+\infty} \|A^k v\|$ soit convergente pour tout $v \in \mathbb{R}^n$. Justifier !
   On supposera cette condition vérifiée dans toute la suite.
2. Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ donnée pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ par
   $$N(v) = \sum_{k=0}^{+\infty} \|A^k v\|$$
   définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.
3. Justifier l'existence d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $N(u) = 1$.
4. Soit $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $N(u) = 1$, calculer $N(Au)$.
5. On note aussi $N(.)$ la norme induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $N(.)$.
   Calculer $N(A)$ et montrer que $N(A) < 1$.