Licence 3e année, 2018–2019

Méthodes Numériques

Partiel du 6 mars 2019

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

On note dans toute la suite $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$.

Questions de cours

Soit $\|.\|_2$ la norme euclidienne sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Définir la norme matricielle induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on notera aussi $\|.\|_2$.
2. Donner la formule qui permet de calculer $\|A\|_2$.
3. Calculer $\|A\|_2$ si A est une matrice orthogonale.
4. Donner l'expression de $\|A\|_2$ si A est une matrice symétrique.

Exercice 1

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose, $N(A) = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$.

1. Montrer que N définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui n'est pas une norme matricielle.
2. Montrer que N est équivalente à la norme de Frobenius $\|.\|_F$:
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \quad N(A) \leq \|A\|_F \leq nN(A)\,.$$
3. Déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\text{pour tout } A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) \leq C\,N(A)N(B)\,.$$
4. Déduire qu'il existe $\alpha > 0$, tel que l'application N_α définie par
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N_\alpha(A) = \alpha N(A)$$
soit une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2

On définit la matrice A par blocs de la façon suivante $A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}} \\ 0 & & \end{array}\right) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

avec $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\operatorname{spec}(B) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ où $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| < 1$.

1. Calculer par blocs la matrice A^2.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer par récurrence A^k.
3. Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k$ existe. Que vaut cette limite ?
4. Que peut-on dire de la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A^k$?
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $C_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n} A^k$.
6. Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} C^n$?
7. Soit $v \in \mathbb{R}^2$ un vecteur propre de B, on pose $u = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline v \end{array}\right) \in \mathbb{R}^3$. Calculer Au.
8. Déduire $\operatorname{spec}(A)$.
9. En déduire les conditions pour que A soit inversible. Donner alors A^{-1}.

Exercice 3

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$, on note $|A|$ la matrice dont les coefficients sont les valeurs absolues des coefficients de A : $|A| = (|a_{i,j}|)_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$.

Pour $B = (b_{i,j})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\preccurlyeq$ la relation entre matrices définie comme suit :

$$A \preccurlyeq B \qquad \text{si pour tout } i, j : a_{ij} \leq b_{ij}\, .$$

1. Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Vérifier que $A_1 \preccurlyeq A_2$. Déterminer la matrice $|A_1|$.
   Est-ce que la relation "$\preccurlyeq$" s'applique à A_1 et O ? à A_2 et O ?

Dans toute la suite de l'exercice, on a $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que $|AB| \preccurlyeq |A|\,|B|$.
   En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|A^k| \preccurlyeq |A|^k$.
3. Si $|A| \preccurlyeq B$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|A|^k \preccurlyeq B^k$.
   En déduire que $\|A^k\|_\infty \leq \|\,|A|^k\,\|_\infty \leq \|B^k\|_\infty$.
   (Indic. : on rappelle que $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$*)*
4. Montrer que si $|A| \preccurlyeq B$, alors on a $\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B)$.
5. Soit $O \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice nulle, déduire de ce qui précède que si $O \preccurlyeq A \preccurlyeq B$, alors on a $\rho(A) \leq \rho(B)$.
6. Soit $O \preccurlyeq A$, montrer que $\max\limits_{1 \leq i \leq n} a_{ii} \leq \rho(A)$.
   (Indic. : considérer des matrices $M_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *dont tous les éléments sont nuls, sauf* $(M_i)_{ii} = a_{ii}$, $1 \leq i \leq n$*)*