UFR
DE MATHÉMATIQUES
ET INFORMATIQUE

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
Sciences
Université de Paris

Licence 3e année, 2020–2021

MÉTHODES NUMÉRIQUES

Partiel du 11 mars 2021

Nombre de pages de l'énoncé : 2 . Durée 1h30.

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

On note dans toute la suite $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$.

Questions de cours

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner la définition du conditionnement de la matrice A, pour le problème d'inversion et pour la norme matricielle subordonnée $\|.\|_2$, noté $c_2(A)$.
2. Calculer $c_2(I_n)$.
3. Montrer que $c_2(A) \geq 1$.
4. Pour A symétrique, calculer $c_2(A)$.

Exercice 1

Soit $\tilde{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$.
On suppose qu'il existe une matrice carrée réelle inversible P telle que $\tilde{A} = PAP^{-1}$
où A est diagonale par blocs et de la forme $A = \begin{pmatrix} I_p & O_{p,q} \\ O_{q,p} & B \end{pmatrix}$.

Avec I_p la matrice identité de taille p, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et $p + q = n$.
Par $O_{k,l}$ on désigne une matrice de zéros de taille `[k,l]`.

On suppose par ailleurs que $\mathrm{spec}(B) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$ avec $|\lambda_1| \leq \cdots \leq |\lambda_q| < 1$.

1. Déterminer $\lim_{k \to +\infty} B^k$.
2. Montrer que $\mathrm{spec}(A) = \{1\} \cup \mathrm{spec}(B)$. En déduire $\rho(A)$.
   (Indic. : Pour v vecteur propre de A, considérer une décomposition en blocs adaptée)

3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer par récurrence A^k. En déduire $\lim_{k\to+\infty} A^k$.

4. Déduire de ce qui précède $\tilde{A}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, et $\lim_{k\to+\infty} \tilde{A}^k$.
   Donner une représentation de cette limite grâce à une décomposition en blocs adaptée de P et de P^{-1}.

5. Sous quelle condition la matrice $\tilde{A}$ est-elle inversible ?
   Calculer alors $\tilde{A}^{-1}$.

6. Calculer $A^t\, A$ et montrer que $\|A\|_2 = \max\{1, \|B\|_2\}$.

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $\|.\|$ une norme matricielle.

1. Pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible quelconque, montrer que $B^{-1} - A^{-1} = -B^{-1}(B - A)A^{-1}$.

Soit $\delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\|A^{-1}\delta A\| < 1$.

2. Justifier que $(I_n + A^{-1}\delta A)$ est inversible et donner une majoration de $\|(I_n + A^{-1}\delta A)^{-1}\|$.
3. Montrer que $A + \delta A$ est inversible et que $\|(A + \delta A)^{-1}\| \leq \dfrac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\delta A\|}$.
4. Déduire de ce qui précède que

$$\|(A + \delta A)^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^2\|\delta A\|}{1 - \|A^{-1}\delta A\|}\,.$$

Exercice 3

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{Tr}(\alpha A) = \alpha\,\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, où $\mathrm{Tr}(A)$ est la trace de la matrice A.

2. Soit $u, v \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs non nuls, on pose $M = u\,v^t$.
   (a) Montrer que $\|M\|_F = \|u\|_2\|v\|_2$.
   (b) Montrer que $\|M\|_2 = \|u\|_2\|v\|_2$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul, on pose $N = u\,u^t$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Tr}(A^tAuu^t) = \mathrm{Tr}((Au)(Au)^t) = \|Au\|_2^2$.
   (b) Montrer que

$$\left\|A\left(I_n - \frac{1}{\|u\|_2^2}N\right)\right\|_F^2 = \|A\|_F^2 - \frac{1}{\|u\|_2^2}\|Au\|_2^2\,.$$