Licence 3e année, 2021–2022

Méthodes Numériques

Partiel du 8 mars 2022

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

On note dans toute la suite $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$.

Questions de cours

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

1. Donner la définition de $c_2(A)$, le conditionnement de A pour le problème de l'inversion de matrices.
   Donner une (brève) interprétation de ce nombre.

2. Calculer $c_2(I_n)$.

3. Donner $c_2(A)$ si A est symétrique. Justifier.

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ le spectre de la matrice $A^t A$.

1. Sans démonstration, rappeler brièvement ce que l'on sait des $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

2. Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que
$$A^t A v = \|A\|_2^2 v\,.$$

3. En déduire que
$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_\infty \|A\|_1}.$$

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque et $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale : $v_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $v_{ii} = v_i > 0$ pour $1 \leq i \leq n$. On pose $B = V^{-1}AV$. On note $\mathrm{spec}(A)$ le spectre de la matrice A.

1. On note $G(A) \subset \mathbb{C}$ la réunion des disques de Gershgorin de la matrice A. Rappeler la définition de $G(A)$ et son lien avec $\mathrm{spec}(A)$. Que vaut $G(V)$?

2. Montrer que $\det(I_n - \lambda B) = \det(I_n - \lambda A)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

3. Pour $1 \leq i, j \leq n$, exprimer les éléments b_{ij} de B grâce aux éléments a_{ij} de A et des éléments $v_1, \ldots, v_n$ de V.

4. Donner l'ensemble $G(B)$.

5. Déduire de ce qui précède que $\mathrm{spec}(A) \subset G(B)$ pour tous $v_1, v_2, \ldots, v_n$ strictement positifs.

6. Application : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ pour $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]$.
   (a) Déterminer $\mathrm{spec}(A)$.
   (b) Donner l'ensemble $G(A)$. Tracer cet ensemble.
   (c) Calculer $B = V^{-1}AV$.
   (d) Donner l'ensemble $G(B)$. Tracer cet ensemble.
   (e) Que peut on dire au sujet de la précision de localisation des valeurs propres de A ?

Exercice 3

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque. Montrer que $|\det(M)| \leq \rho(M)^n$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\det(A) \neq 0$. On définit $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $b_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|}$.

2. Justifier pourquoi la matrice B est bien définie.

3. Exprimer $\det(B)$ en fonction de $\det(A)$.

4. Calculer $\|B\|_\infty$. (On rappelle que $\|B\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|$)

5. En déduire que $\rho(B) \leq 1$ et $|\det(B)| \leq 1$.

6. Montrer que $|\det(A)| \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|$.