Licence 3e année, 2022–2023

MÉTHODES NUMÉRIQUES

Partiel du 8 mars 2023

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

On note dans toute la suite $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$.

Questions de cours

Soit $\|.\|$ une norme sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner la définition de la norme matricielle induite par cette norme sur $\mathbb{R}^n$ et que l'on notera aussi $\|.\|$.

2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$.

Exercice 1

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $D = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^3 \end{pmatrix}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on pose $\|x\|_r = \|Dx\|_1$. Justifier (brièvement) que $\|.\|_r$ est une norme sur $\mathbb{R}^3$.
2. Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\|A\|_r$ la norme matricielle induite par la norme vectorielle $\|.\|_r$. Montrer que $\|A\|_r = \|DAD^{-1}\|_1$.
3. On considère la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer le rayon spectral $\rho(T)$.
   (b) Calculer $\|T\|_1$, $\|T\|_\infty$ et $\|T\|_F$. Comparer au rayon spectral.
   (c) Calculer $\|T\|_r$.
   (d) Soit $\varepsilon > 0$ quelconque, montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\|T\|_r \leq \rho(T) + \varepsilon$.

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. On sait alors que ses valeurs propres vérifient $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ et qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $c_2(A) = \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}$.
2. Montrer que $\lambda_1 = \min\limits_{x/\|x\|_2=1} x^t Ax \leq x^t Ax \leq \max\limits_{x/\|x\|_2=1} x^t Ax = \lambda_n$.
   (*Indic. : considérer* $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i,\ \|x\|_2 = 1$)

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, avec les valeurs propres
$0 < \nu_1 \leq \nu_2 \leq \cdots \leq \nu_n$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, avec $\|x\|_2 = 1$, donner un encadrement de $x^t(A+B)x$.

4. Déduire de tout ce qui précède que $c_2(A+B) \leq \dfrac{\lambda_n + \nu_n}{\lambda_1 + \nu_1}$.

5. Montrer que $c_2(A+B) \leq \max(c_2(A), c_2(B))$.

Exercice 3

Soit I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et A une matrice carrée d'ordre n, symétrique définie positive, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$.
On définit une suite de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ par :

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ donné ;} \\ x^{(\text{k})} = x^{(\text{k-1})} - \sigma(Ax^{(\text{k-1})} - b), k \geq 1, \end{cases}$$

où $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ est un paramètre réel.

1. Exprimer $x^{(\text{k})}$ en fonction de $x^{(\text{k-2})}$ et en déduire que $x^{(\text{k})}$ peut s'écrire
   $x^{(\text{k})} = \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} (I_n - \sigma A)^i\right) \sigma b + (I_n - \sigma A)^k\, x^{(0)}$.

2. On note $\widetilde{\lambda_i}$, $1 \leq i \leq n$, les valeurs propres de $B = I_n - \sigma A$. Exprimer $\widetilde{\lambda_i}$ en fonction des valeurs propres de A.
   En déduire que pour tout $1 \leq i \leq n$, $-1 < \widetilde{\lambda_i} < 1$ si et seulement si $0 < \sigma < 2/\lambda_n$.

3. Montrer que pour $0 < \sigma < 2/\lambda_n$ on a $\lim\limits_{k \to +\infty} (I_n - \sigma A)^k = O$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} (I_n - \sigma A)^i = \frac{1}{\sigma} A^{-1}$.

4. Déduire que pour $0 < \sigma < 2/\lambda_n$, on a pour tout $x^{(0)}$, $\lim\limits_{k \to +\infty} x^{(\text{k})} = x^*$ avec $Ax^* = b$.