Licence 3e année, 2023–2024

Méthodes Numériques

Partiel du 21 mars 2024

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

On note dans toute la suite $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$ et I_n la matrice identité.

Questions de cours

Soit $\|.\|$ une norme matricielle quelconque et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $\|A\| < 1$, alors $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = O$.
2. Montrer que si $(A - I_n)$ est non inversible, alors $\|A\| \geq 1$.

Exercice 1

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $D_i = D(a_{ii}, R_i) \subset \mathbb{C}$ le disque fermé de centre a_{ii} et de rayon $R_i = \displaystyle\sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$ et $G(A)$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par $G(A) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B(a_{ii}, R_i)$ (union des disques de Gershgorin).

Soit $\lambda \in \text{spec}(A)$ vérifiant pour tout $1 \leq i \leq n$: $\quad |a_{ii} - \lambda| \geq R_i$.

Soit $v \neq 0$ tel que $Av = \lambda v$, on note $k \in \{1, \dots, n\}$ l'indice, non nécessairement unique, tel que $\|v\|_\infty = |v_k|$.

1. Montrer que λ est sur le bord d'au moins un des disques de Gershgorin.
2. Montrer que pour tout indice $k \in \{1, \dots, n\}$ vérifiant $|v_k| = \|v\|_\infty$ on a $|a_{kk} - \lambda| = R_k$.
   (Indic. : écrire que $(Av)_i = \lambda v_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$, déduire que $\lambda \in D_k$)
3. Application : on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $\text{spec}(A)$.
   (b) Tracer l'ensemble $G(A)$ dans $\mathbb{C}$ et placer les valeurs propres de A.
   (c) Déterminer $v \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $Av = v$. Que peut-on dire de $\|v\|_\infty$ et des $|v_i|$, $1 \leq i \leq 3$? Vérifier le résultat de la question 2.

Exercice 2
Soit $\|.\|$ une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $y \in \mathbb{R}^n$ non nul fixé. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_y = \|x\, y^t\|$.

1. Montrer que $\|.\|_y$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on a $\|Ax\|_y \leq \|A\| \|x\|_y$.
3. Soit $N_y(.)$ la norme induite sur les matrices par $\|.\|_y$, montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $N_y(A) \leq \|A\|$.
4. Donner explicitement $N_y(A)$ si $\|.\|$ est la norme de Frobenius sur les matrices, *i.e.* $\|x\|_y = \|x\, y^t\|_F$.
   Rappel : pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|M\|_F = (trace(M^t\, M))^{\frac{1}{2}}$.
5. Donner explicitement $N_y(A)$ si $\|.\|$ est la norme 2 sur les matrices, *i.e.* $\|x\|_y = \|x\, y^t\|_2$.

Exercice 3
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), n \geq 1$, une matrice inversible et $p \geq 2$ un entier. On définit la suite de matrices

$$Q_0 = I_n \qquad Q_{k+1} = Q_k \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} (-1)^j (AQ_k)^j, k \geq 0 \ ,$$

où I_n est la matrice identité et avec la convention $M^0 = I_n$ pour une matrice M non nulle.
On pose $R_k = I_n - AQ_k$.

1. Calculer AQ_{k+1} et R_k^p.
2. En déduire R_{k+1} en fonction de R_k.
3. Déduire de ce qui précède que $\lim\limits_{k \to +\infty} Q_k = A^{-1}$ si et seulement si $\rho(R_0) < 1$.
   Par $\rho(.)$ on désigne le rayon spectral.