MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
Sciences
Université Paris Cité

**Licence 3e année, 2023–2024**

# Méthodes Numériques

## Partiel du 19 mars 2025

***Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.***

**Tout document est interdit.**
**Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.**

**Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.**

---

On note dans toute la suite $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées réelles de taille $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_n$ la matrice identité.

### Questions de cours

Soit $\|.\|$ une norme matricielle quelconque et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $\|A\| < 1$, alors $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = O$.
2. Montrer que si $(A - I_n)$ est non inversible, alors $\|A\| \geq 1$.

### Exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $A^t = A$, quel est le nombre d'opérations scalaires (+,-,/,*) nécessaire pour calculer la forme quadratique $q(x) = x^t A x$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $A$ inversible, et $b \in \mathbb{R}^n$, alors la solution du système $Ax = b$ est donnée par le théorème de Cramer :
on obtient la $i$-ème coordonné de $x$, $1 \leq i \leq n$, par $x_i = \dfrac{\text{dét}(A_i)}{\text{dét}(A)}$,
où $A_i$ est la matrice carré formée en remplaçant la $i$-ème colonne de $A$ par le vecteur $b$.

   Si on calcule un déterminant de façon récursive en développant par rapport à une colonne, quelle sera la complexité de l'algorithme de Cramer ?
   On pourra brièvement rappeler la complexité du calcul récursif d'un déterminant par
$$\text{dét}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\text{cof}_{ij}\ ,\ \text{pour } j \text{ fixé, p.ex. } j = 1\,,$$
   où $\text{cof}_{ij}$ est le *cofacteur* de l'élément $a_{ij}$ : $\text{cof}_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ et $\Delta_{ij}$ est le *mineur* de $a_{ij}$ dans $A$, c.-à-d. le déterminant de la sous-matrice, de taille $[n-1, n-1]$, extraite de $A$ en ôtant la $i$-ème ligne et la $j$-ème colonne.

**Exercice 2**

On définit la matrice $A$ par blocs de la façon suivante $A = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{$B$}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

avec $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\operatorname{spec}(B) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ où $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| < 1$.

1. Calculer par blocs la matrice $A^2$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer par récurrence $A^k$.
3. Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k$ existe. Que vaut cette limite ?
4. Que peut-on dire de la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A^k$ ?
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $C_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n} A^k$.
6. Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n$ ?
7. Soit $v \in \mathbb{R}^2$ un vecteur propre de $B$, on pose $u = \begin{pmatrix} v \\ \hline 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Calculer $Au$.
8. Déduire $\operatorname{spec}(A)$.
9. En déduire les conditions pour que $A$ soit inversible. Donner alors $A^{-1}$.

**Exercice 3**

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\partial\Omega_{12} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |a_{11} - z||a_{22} - z| = R_1 R_2\} \subset \mathbb{C}$ avec $R_1 = |a_{12}|$ et $R_2 = |a_{21}|$.

On note par ailleurs

$$\mathcal{B} = \left\{ B = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ avec } b_{12}, b_{21} \in \mathbb{C} \text{ tels que } |b_{12}| = R_1 \text{ et } |b_{21}| = R_2 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

avec $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ l'espace des matrices carrées complexes de taille 2.

1. Montrer que $\operatorname{spec}(A) \subset \partial\Omega_{12}$.
2. Montrer que pour tout $B \in \mathcal{B}$, $\operatorname{spec}(B) \subset \partial\Omega_{12}$.
3. Montrer que $\partial\Omega_{12} = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} \operatorname{spec}(B)$.