Université Paris–Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Licence 3e année, 2007–2008

MÉTHODES NUMÉRIQUES

Examen partiel du 17 mars 2008

Nombre de pages de l'énoncé : 1 . Durée 1h30.

Tout document ainsi que l'utilisation de tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est interdit. *Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.*

Questions de cours

On note $|||.|||_2$ la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|.\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$.

a) Donner une définition de $|||A|||_2$, où $A \in \mathcal{M}(n,n)$.

b) Soit $A, O_1, O_2 \in \mathcal{M}(n,n)$, avec O_i, $i = 1, 2$, des matrices orthogonales.
Montrer que $|||O_1A|||_2 = |||A|||_2 = |||AO_2|||_2$.

c) Donner la définition de $c_2(A)$, le conditionnement de la matrice A pour $|||.|||_2$.
Que peut-on dire de $c_2(O_1AO_2)$?

Exercice 1.

1. Soit les matrices,

$$\bar{L}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{L}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

   Interpréter (sans les calculer) les matrices suivantes : PA, AP, $\bar{L}^1A$.

   Interpréter puis calculer $(P)^{-1}$ et $\left(\bar{L}^2\bar{L}^1\right)^{-1}$.

2. Faire la décomposition LU de la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 2.

Soit L une matrice triangulaire inférieure inversible de taille $n \times n$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

1. Écrire une fonction *Scilab*, `function x=syst(L,b)` qui prend en entrée L et b et calcule un vecteur x tel que $Lx = b$.
2. Calculer le nombre d'opérations élémentaires nécessaires au calcul du vecteur x.

Soit A une matrice carrée d'ordre n, symétrique définie positive et pleine.

3. Calculer le nombre d'opérations nécessaires pour déterminer A^2.
   Comment utiliser la symétrie de A pour diminuer le nombre d'opérations ?

On cherche à résoudre le système $A^2x = b$. On propose deux méthodes de résolution de ce système :

(i) Calculer la décomposition LL^t de A, puis résoudre les systèmes $LL^ty = b$ et $LL^tx = y$.

(ii) Calculer A^2, effectuer la décomposition $\tilde{L}\tilde{L}^t$ de A^2, résoudre le système $\tilde{L}\tilde{L}^tx = b$.

4. Calculer le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour chacune des deux méthodes et comparer.
   (Note : on rappelle que le coût de la décomposition de Cholesky de A est $O(\frac{1}{3}n^3)$)