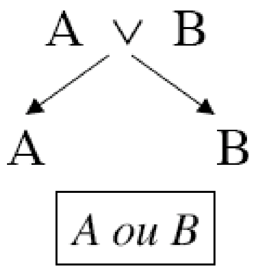
Arbres de Beth

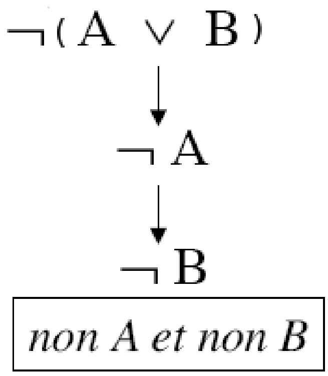
- Ce sont des arbres qui peuvent remplacer les tables de vérité ou tables de Karnaugh, lorsqu'on recherche des distributions de vérité qui rendent une ou plusieurs formules vraies.
- On parle aussi de **méthode des arbres de vérité**, **méthode des tableaux**. L'appellation «arbres de Beth» est en honneur du logicien néerlandais Evert Willem Beth (1908-1964).
- De ces arbres ont peut également déduire des FND ou FNC souvent simplifiées par rapport à la méthode des tables de vérité.
- Méthode :
  1. on commence l'arbre en plaçant toutes les formules à vérifier sur une branche ;
  2. de façon inductive, on décompose chaque formule grâce aux arbres associés aux opérations de base du calcul des propositions ;
  3. lorsque seul les atomes ou leur négation restent, on a terminé.

Arbres de Beth pour la conjonction

1. Si toutes les deux formules A et B sont des conséquences de la formule initiale, on ajoute les deux sur la branche (cas du $\wedge$) ;
2. la négation $\neg$ est simplifiée en utilisant les lois de De Morgan ;
3. si l'une au mois est une conséquence, on crée une branche pour A et une pour B (cas de $\vee$).

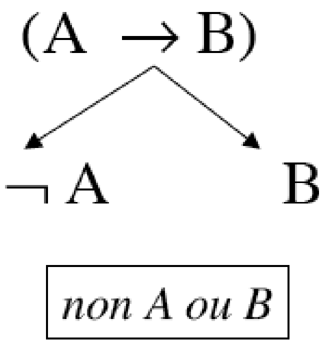
Arbres de Beth pour la disjonction

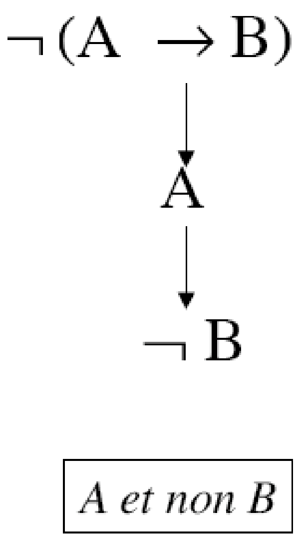




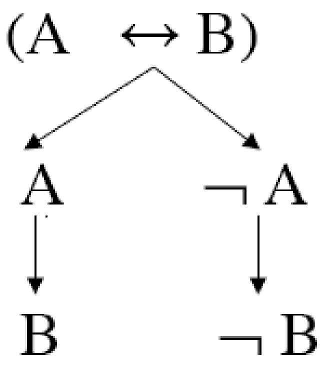
1. Si l'une au mois des formules A ou B est une conséquence, on crée une branche pour A et une pour B (cas de $\vee$) ;
2. la négation $\neg$ est simplifiée en utilisant les lois de De Morgan ;
3. si toutes les deux formules sont des conséquences de la formule initiale, on ajoute les deux sur la branche (cas du $\wedge$).

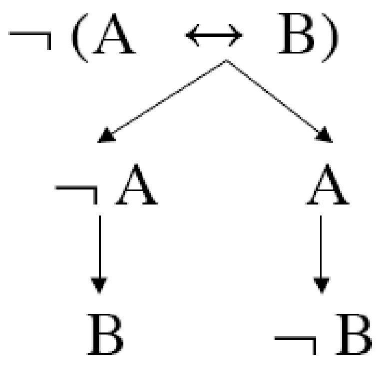
Arbres de Beth pour l'implication





Arbres de Beth pour l'équivalence



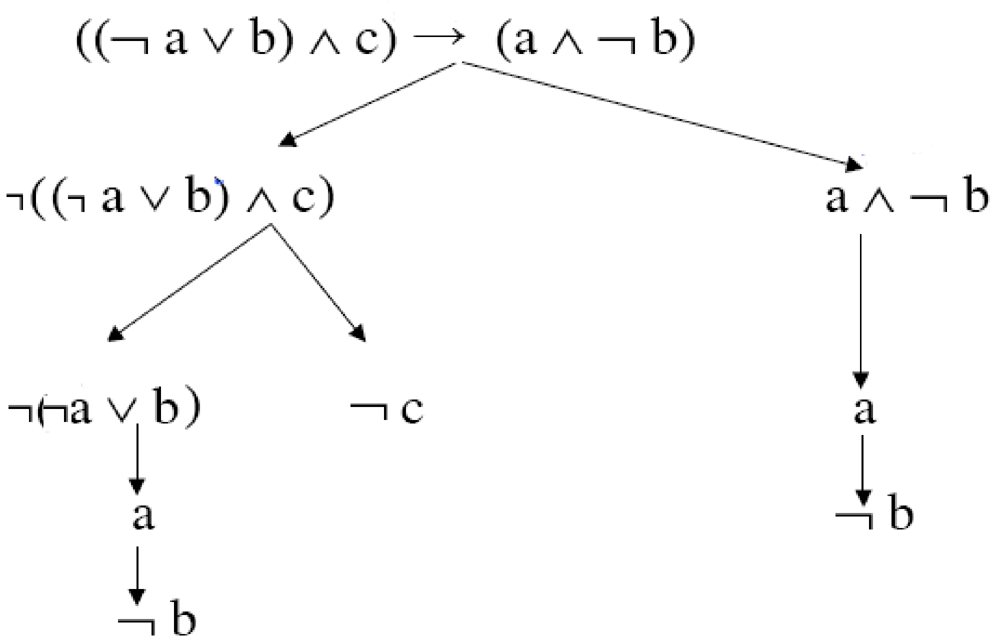


(A et B) ou (non A et non B)

(non A et B) ou (A et non B)

Arbres de Beth

Exemple : $F = ((\neg a \vee b) \wedge c) \rightarrow (a \wedge \neg b)$



Arbres de Beth

Exemple : F (suite)

- On peut déduire de cet arbre les distributions de vérité qui rendent la formule F vraie :

  Si l'on rend vrais tous les atomes d'une branche, on rend vraies toutes les formules de cette branche donc la formule d'origine.

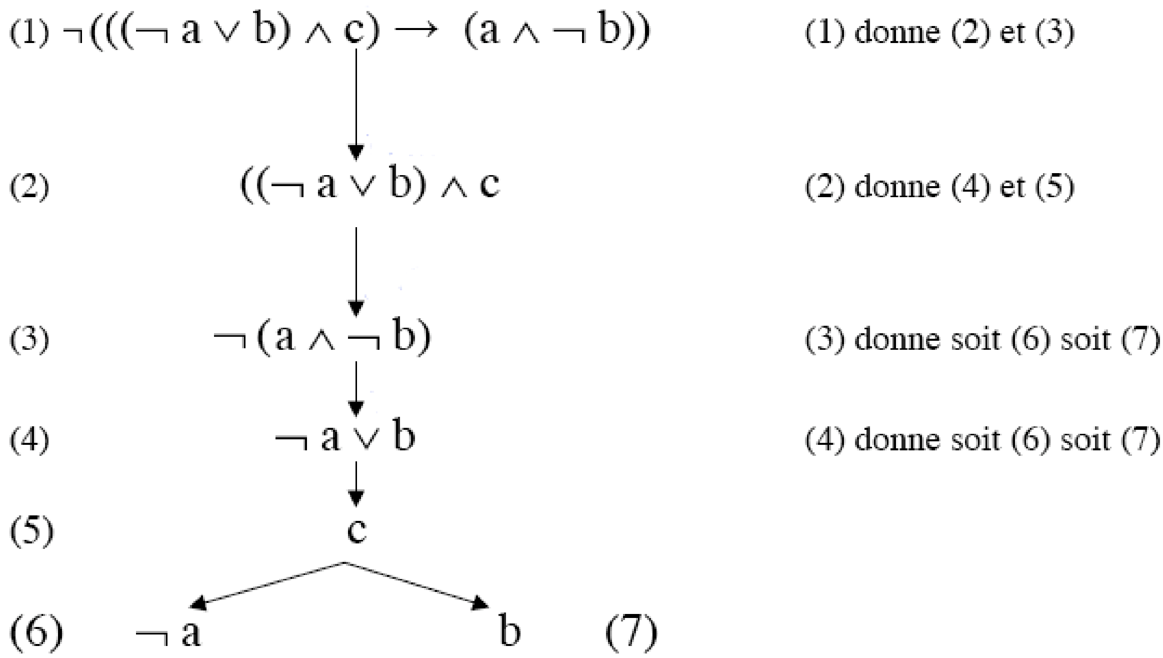
- Il suffit que $(a \wedge \neg b)$ ou $\neg c$ soient vrais pour que F le soit.
- Ceci permet de trouver une FND de la formule F :

$$F = (a \wedge \neg b) \vee \neg c$$

- Dans l'arbre de F il y a 3 branches mais 2 sont identiques.

Arbres de Beth

Exemple : $\neg F = \neg(((\neg a \vee b) \wedge c) \rightarrow (a \wedge \neg b))$



Arbres de Beth

Exemple : $\neg F$ (suite)

- On a deux branches :
  celle de gauche $c \wedge \neg a$ et celle de droite $c \wedge b$.
- D'où la FND de $\neg F$:

$$\neg F = (c \wedge \neg a) \vee (c \wedge b)$$

- On obtient une FNC de la formule F à partir de la FND de $\neg F$:

$$F = \neg((c \wedge \neg a) \vee (c \wedge b)) = (\neg c \vee a) \wedge (\neg c \vee \neg b)$$

Branches fermées, arbres fermés

- Pour satisfaire une formule qui est à l'origine de l'arbre, il suffit de satisfaire tous les atomes **d'une** des branches de l'arbre.
- Si une branche comporte une variable propositionnelle **et** sa négation, on dit que l'on a une branche fermée.
- Si **toutes** les branches d'un arbre sont fermées, on dit que l'on a un arbre fermé.
  Dans ce cas la formule d'origine n'est **pas satisfaisable**.
- Ainsi pour montrer qu'une formule F est **tautologique**, il suffit de former un arbre dont l'origine est la formule $\neg F$:

  si l'arbre de $\neg F$ est fermé, F est tautologique
  puisque $\neg F$ n'est pas satisfaisable.

Notion de conséquence logique

Soit Σ un ensemble de formules et C une formule.

- L'ensemble Σ est dit satisfaisable si il existe une distribution de vérité qui satisfait toutes les formules de Σ à la fois :

$$\exists \delta : \forall F \in \Sigma, \delta(F) = 1$$

- La formule C est dite conséquence de Σ si toute distribution satisfaisant toutes les formules de Σ, satisfait aussi C :

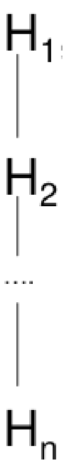
$$\forall \delta : (\forall F \in \Sigma, \delta(F) = 1) \Rightarrow \delta(C) = 1$$

  On note $\Sigma \models C$

- L'ensemble Σ est appelé «ensemble d'hypothèses» et C est la «conclusion».

Arbres de Beth et ensemble de formules consistant

- On considère un ensemble de formules $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$.
- On construit un arbre dont ces formules sont les formules initiales : elles forment le « tronc » de l'arbre.
- On développe l'arbre en appliquant les règles à chacune des formules.



  - Si il existe *au moins une branche ouverte*, alors il existe au moins une distribution qui satisfait toutes les formules $H_1, H_2, \ldots, H_n$.
    L'ensemble de formules est dit consistant.
  - Si *toutes les branches de l'arbre sont fermées*, les formules $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ne peuvent pas être simultanément satisfaites.
    L'ensemble de formules est dit inconsistant ou insatisfaisable.

Arbres de Beth et légitimité d'une déduction

- Pour savoir si, à partir de l'ensemble de formules Σ, on peut déduire la formule C, il faut répondre à la question :

  L'ensemble $\Sigma \cup \{\neg C\}$ *est-il consistant ou non consistant ?*

- S'il est **inconsistant**, toutes les branches sont fermées, il n'existe pas donc aucune distribution de vérité qui satisfasse à la fois les formules de Σ et $\neg C$.

  Donc toute distribution qui satisfait Σ, satisfait aussi C et la déduction est légitime.

- S'il est **consistant**, l'arbre possède une branche ouverte, il existe donc une distribution qui satisfait à la fois les hypothèses, les formules de Σ, et la négation de la conclusion $\neg C$.

  Donc la déduction n'est pas légitime.

Arbres de Beth et légitimité d'une déduction

Exemples :

- $(p \wedge q) \models p$
- $p \models (p \vee q)$
- $\Sigma = \{p, q \to (p \to r)\}$ et $C = q \to r$, alors $\Sigma \models C$
- Que peut-on dire des déductions suivantes ?
  1. $\{p \to (q \to r),\ \neg s \vee p,\ q\} \models (s \to r)$
  2. $\{(p \wedge q) \to r,\ r \to s,\ q \wedge \neg s\} \models p$

Récréation (revisitée)

Reprenons l'exemple suivant dans le contexte de la déduction :

Lors d'une enquête de l'inspecteur Maigret, les personnes A, B, C et D sont suspectées. Il est établi que :

1. Si A et B sont coupables, il en est de même de C.
2. Si A est coupable, l'un au moins de B et C est aussi coupable.
3. Si C est coupable, D l'est aussi.
4. Si A est innocent, D est coupable.

On note x = «X est coupable» pour $X \in \{A, B, C, D\}$.

Pour

$$\Sigma = \{(a \wedge b) \to c,\ a \to (b \vee c),\ c \to d,\ \neg a \to d\}$$

on a alors que Σ est consistant et que $\Sigma \models d$. En effet,

la conjonction des formules de Σ a comme FND $(\neg a \wedge d) \vee (c \wedge d)$.

Arbres de Beth : remarques importantes

- On peut traiter les formules du tronc dans un *ordre quelconque* :

  mais afin de simplifier l'arbre, on commence par développer les conjonctions.

- Il peut être judicieux de *numéroter* les formules et leurs enfants.

- On *marque* une formule qui a été traitée afin de ne pas la traiter deux fois.

- Lorsque l'on traite une formule, on écrit les sous-formules auxquelles elle donne naissance à l'extrémité de *toutes les branches ouvertes* qui passent par la formule considérée.

- Dès qu'une *branche est fermée*, on n'a pas besoin de reproduire dans sa suite d'éventuelles sous-formules.

Propriétés de la déduction

- Si Σ est un ensemble de formules **inconsistant**,
  alors pour toute formule C , la déduction $\Sigma \models C$ est légitime.

  D'un ensemble de formules inconsistant, on peut déduire n'importe quoi.

- *Exemple :*

  L'ensemble des proverbes est inconsistant. Il contient par exemple « tel père, tel fils » et « à père avare, enfant prodigue » qui sont des énoncés négation l'un de l'autre.

  On peut donc déduire de l'ensemble des proverbes tout énoncé quel qu'il soit.

Propriétés de la déduction

- Si C est une **tautologie**, C est déductible de tout ensemble de formules Σ.

- Soient Σ et Σ' sont deux ensembles de formules,

  si $\Sigma \subset \Sigma'$ et $\Sigma \models C$ alors $\Sigma' \models C$.

  Si une déduction est légitime, on peut toujours ajouter des hypothèses, la déduction reste légitime.

- Une tautologie étant déductible de tout ensemble de formules, elle est en particulier déductible de l'ensemble vide $\emptyset$.

  Il est donc cohérent d'utiliser le même symbole $\models$ pour noter

  - $\Sigma \models C$ pour dire « C est déductible de Σ »
  - $\models F$ pour dire « F est tautologique »,
    ce qui peut être vu comme abréviation de $\varnothing \models F$

Théorème de la déduction

- Si $\Sigma = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ est un ensemble fini d'hypothèses, il est équivalent d'écrire

$$\{H_1, H_2, \ldots, H_n\} \models C \qquad \text{ou} \qquad H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \models C$$

- Théorème de la déduction
Si Σ est un ensemble de formules et H une formule donnée, alors

$$\Sigma \cup \{H\} \models C \text{ si et seulement si } \Sigma \models H \to C$$

Ce théorème est évident à partir de la définition sémantique de la déduction, mais ne l'est plus si l'on donne une définition de la déduction purement syntaxique.

- Pour $\Sigma = \varnothing$ on obtient $H \models C$ si et seulement si $\models (H \to C)$ ce qui exprime la relation qui existe entre le connecteur $\to$ et la déduction

Quelques exemples de déduction

- Pour tester la déduction $\{p \to (q \to r), \neg s \vee p, q\} \models (s \to r)$
on peut tester la déduction équivalente :
$\{p \to (q \to r), \neg s \vee p, q, s\} \models r$
ce qui augmente l'ensemble d'hypothèses mais simplifie la conclusion.
- Tester par la méthode des arbres la déduction

$$\{p, q \to (p \to r)\} \models (q \to r)$$

- Vérifier que les formules suivantes sont tautologiques

$$[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$$

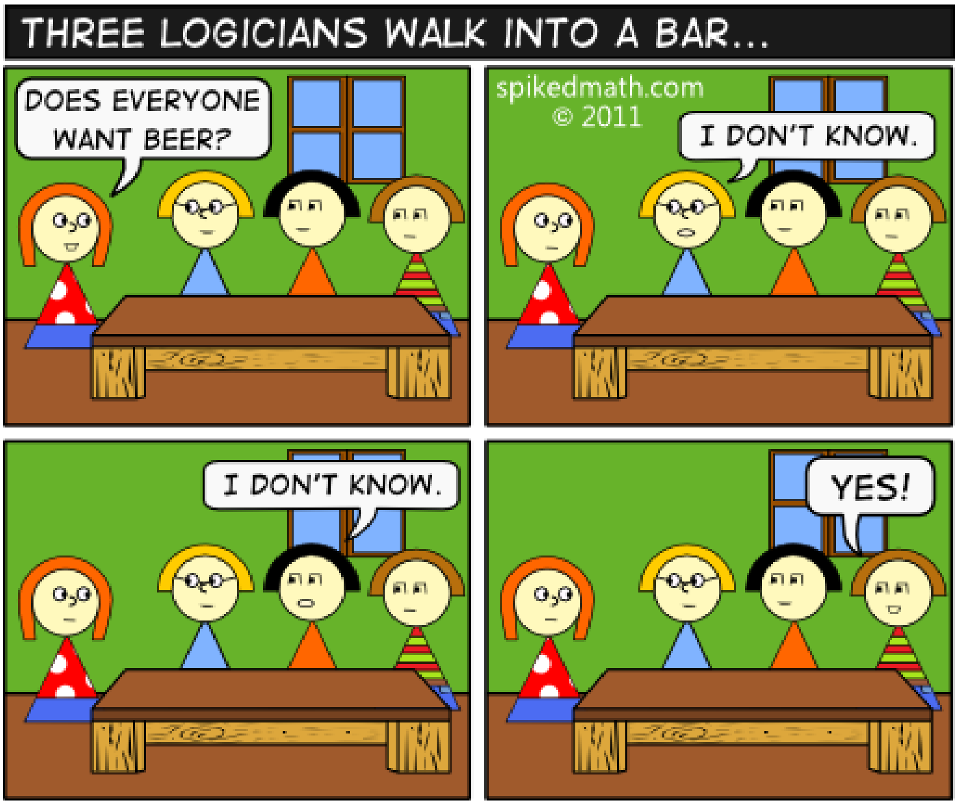
$$(\neg s \to \neg p) \to [(p \to (r \to q)) \to (p \to (p \to s))]$$

- Vérifier que la formule

$$(\neg B \to \neg A) \to [(\neg B \to A) \to B)]$$

est tautologique.
De quel schéma de raisonnement s'agit-il ?

Temps de terminer avec. . .



Merci de votre attention tout au long de ce semestre. . .