Conclusion

- La représentation des réels en machine nécessite de choisir la taille mémoire :
  souvent 4 octets ou 8 octets, des fois 16 octets.
- Les nombres réels représentables en machine sont en nombre fini, ils constituent un ensemble discret.
- Les calculs en flottant peuvent provoquer des **underflow**, **overflow** et **erreurs d'arrondi**.
  Certains standards permettent de gérer des **exceptions** :
  `Inf`, `NaN`, nombres sous-normaux,...
- On mesure la puissance d'une unité de calcul en virgule flottante en **FLOPS** (en anglais, FLoating point Operations Per Second).
  En juin 2013, l'ordinateur Tianhe-2 de la *NUDT*, Chine, a effectué $33,86$ petaFLOPS = $33,86 \times 10^{15}$ FLOPS contre 10^{10} FLOPS pour un processeur «normal» à $2.5 - GHz$.

Représenter de l'information

- Afin de représenter et/ou échanger une information, on a besoin d'un code :
  1. pas compliqué et facile à manipuler ;
  2. compréhensible par d'autres que l'émetteur ;
  3. économe en espace ou temps.
- La représentation de quantités par des symboles ou *chiffres* est un premier exemple de code.
- Mais on peut avoir d'autres types d'informations à représenter :
  1. La notation mathématique pour représenter des résultats mathématiques ;
  2. La notation musicale pour représenter des morceaux de musique ;
  3. La notation phonétique pour représenter la prononciation d'un mot ;
  4. Le code braille qui permet aux aveugles de lire grâce au toucher ;

  $\vdots$
- Ces codes sont utilisables directement par un être humain, ayant plus ou moins d'expérience.

Langage mathématique

Théorème 1.1 (Critère de Cauchy)
Une condition nécessaire et suffisante pour que la série numérique $\sum_n u_n$ converge est qu'elle vérifie le critère de Cauchy *:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad (n \geqslant m \geqslant N \Longrightarrow |\sum_{k=m}^{n} u_k| \leqslant \varepsilon).$$

Démonstration La série numérique $\sum_n u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(U_n)_n$ qui lui est associée converge. Or, une suite numérique converge si et seulement s'il s'agit d'une suite de Cauchy[(10)]. Ainsi la série numérique $\sum_n u_n$ converge si et seulement si la suite $(U_n)_n$ de terme général $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est une suite de Cauchy, c'est-à-dire[(11)] si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \tilde{N} \in \mathbb{N} \quad \forall (p,n) \in \mathbb{N}^2 \quad \left(n \geqslant p \geqslant \tilde{N} \Longrightarrow |U_n - U_p| \leqslant \varepsilon\right). \qquad (2)$$

Soit ε un réel strictement positif et $N = \tilde{N}+1$ où $\tilde{N}$ est défini par l'assertion (2). Pour tous réels m et n tels que $n \geqslant m \geqslant \tilde{N}+1$ on a

$$\left|\sum_{k=m}^{n} u_k\right| = |U_n - U_{m-1}| \leqslant \varepsilon$$

d'après l'assertion (2) où $p = m-1$. Le résultat est établi. □

Partition d'opéra

Autres exemples de codes

- Dans la plupart des cas, l'*écriture* d'un mot diffère de sa *prononciation*. Afin de représenter la prononciation d'un mot, sans se préoccuper du sens, on utilise l'alphabet phonétique

Exemples : collègue : [kɔlɛːg], grande dame : [gʁɑ̃d ːam]
université : [ynivɛʁsite], amputé : [ɑ̃pyte]

- En radiotéléphonie, pour éviter des confusions entre sons semblables, on utilise un alphabet radio, comme l'alphabet phonétique de l'OTAN :

Lettre	Code
A	alpha
B	bravo
C	charlie
D	delta
E	echo

…

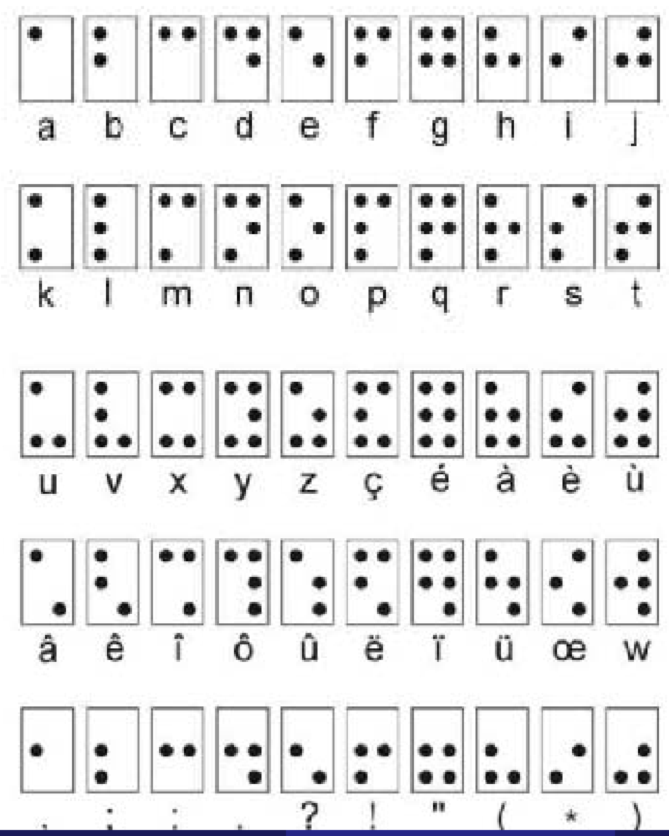
Lettre	Code
V	victor
W	whiskey
X	x-ray
Y	yankee
Z	zulu

…

Lettre	Code
8	eight
9	niner
virgule	décimale
00	hundred
000	thousand

Autres exemples de codes

Le code de braille d'après Louis Braille, 1809-1852, permet de représenter 64 caractères grâce à 6 emplacements.



Codage de l'information sur ordinateur

- On a vu comment un ordinateur, basé sur le système booléen $\{0, 1\}$, peut coder des nombres entiers et des nombres réels.
- Or des informations variées sont à coder :
  1. des instructions ou programmes : code *C*, code *Java*,... ;
  2. des textes, des bases de données,... ;
  3. de la parole et de la musique ;
  4. des images et des films.
- Pour décoder les suites de bits qui représentent les divers objets, il faut connaître le format utilisé et les alphabets et règles associés.

  L'extension du nom de fichier indique le format employé :
  `.c, .h, .cpp, .java, .html, .xml, .pdf, .tex, .ps, .rtf, .odt, .xls, .zip, .ogg, .wav, .png, .jpg, .mpg, .avi,...`
  Pour l'ordinateur, le format est codé dans les premiers mots mémoire du fichier. C'est le «nombre magique» (*magic number*).

Codage de l'information sur ordinateur

En fonction des contraintes, le choix du code est important :

- Lors de la transmission de données des erreurs peuvent apparaître.

  Grâce à des informations redondantes, certains codes permettent de détecter et corriger des erreurs, on parle alors de codes correcteurs.
- Afin d'augmenter la vitesse de transmission ou de diminuer la taille des mémoires de stockage, il est important d'avoir des codes qui représentent l'information en utilisant le moins de symboles possible.

  On parle alors de méthodes de compression.
- Ne pas confondre *codage* et *cryptage* (ou *chiffrement*).
  Le cryptage est un moyen pour transformer une suite de données afin d'assurer sa confidentialité.

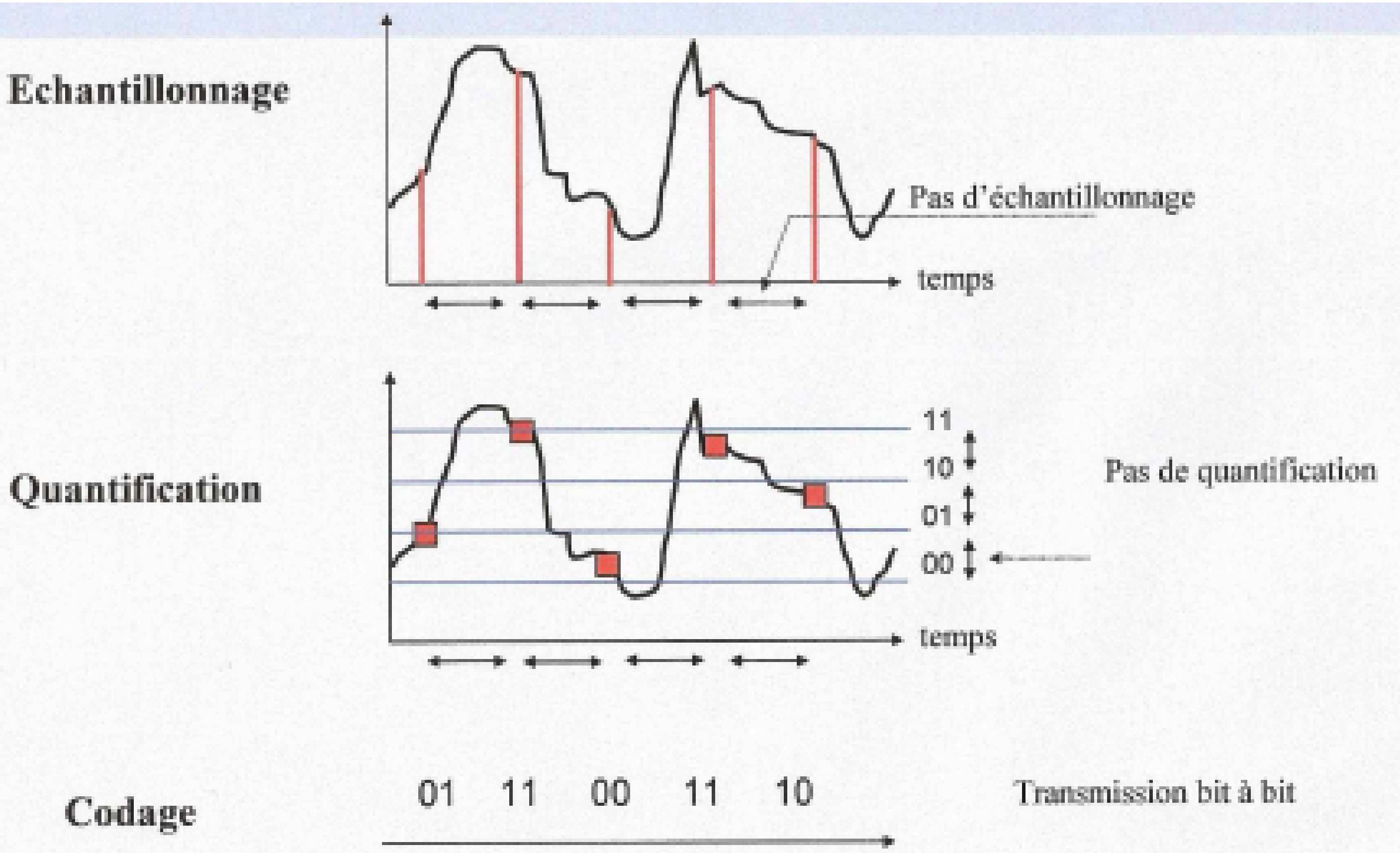
Code ASCII

Le code normalisé ASCII *American Standard Code for Information Interchange* permet de coder des caractères alphanumériques.

- Code utilisé pour représenter du texte brut, des commandes ou programmes dans un ordinateur. Il y a plusieurs variantes :
  1. la version standard code sur 7 bits 128 caractères :
     Les 95 caractères affichables “A”, “B”,. . . , “Z”, “a”,. . . , “z”, “0”,. . . , “9”, “&”, “@”, . . . , en plus des codes de “fin de ligne”,. . . permettent de coder facilement du texte anglais.
  2. la version étendue code sur un octet et permet de représenter des commandes de format, de communication, des lettres accentuées,. . .
- Exemple : “A” est codée par l’entier 65 en binaire naturel 100 0001
- Actuellement d’autres standards sont utilisés. Par exemple `utf8` est compatible avec ASCII et permet de coder tous les caractères internationaux. Le codage se fait sur 4 octets.

Codage audio

Pour numériser un signal *analogique* audio, il y a trois étapes :



Codage audio

- Numériser un signal analogique 1D revient à remplacer une fonction par une suite :

$$\begin{array}{rcl} s : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ t & \mapsto & f(t) \end{array} \qquad \text{numérisation : } (C_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \text{où } C_n \in \{0,1\}^k$$

- Lors de l'échantillonnage on remplace $s(t)$ par une suite (e_n).
  Le *pas d'échantillonnage* T définit la distance temporelle entre le prélèvement des valeurs du signal : $e_n = s(t_0 + nT)$.
  L'inverse du pas d'échantillonnage est la fréquence d'échantillonnage, $f = 1/T$ mesurée en Hz$= 1/s$.
- Dans l'étape de quantification, on remplace les valeurs continues e_n par des valeurs prises dans un ensemble discret ou fini $q_n = Q(e_n) \in \{v_1, \ldots, v_p\}$.
  Le *pas quantification* définit la précision de l'approximation et induit la taille des mots mémoires : $2^k = p$.
- L'étape de codage associe à chaque q_n son code dans $\{0,1\}^k$.

Codage audio

- Pour perdre le moins d'information lors de la conversion analogique/numérique, il faut prendre «suffisamment» d'échantillons et «suffisamment» de valeurs de quantification.

  Pour donner un sens précis à ceci, on utilise la *théorie mathématique du traitement du signal*.
- La conversion numérique/analogique permet ensuite d'écouter le signal grâce à un casque ou haut-parleur.

  On a besoin d'une **interpolation** pour recréer les valeurs perdues par l'échantillonnage. C'est un problème qui admet une infinité de solutions.

  Sous quelles hypothèses on peut retrouver le signal initial $f(t)$ est aussi étudié en théorie mathématique du traitement du signal (*théorème de Shannon-Nyquist*).