UFR DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Licence MIA, L3

Notes de cours

Optimisation

Georges Koepfler 2006-2010 - georges.koepfler@mi.parisdescartes.fr

Table des matières

<u>Avertissement :</u> ces notes sont un support et complément du cours magistral. Leur contenu n'est pas équivalent au cours enseigné, en particulier les examens et contrôles se réfèrent au cours enseigné uniquement.

<u>Bibliographie.</u> Les références suivantes peuvent être utiles mais dépassent le niveau de ce cours.

- H. Cartan, *Cours de calcul différentiel*, Hermann 1997.
- J.E. Rombaldi, *Analyse matricielle. Cours et exercices résolus*, EDP Sciences 1999.
- P.G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse matricielle et à l'optimisation*, Masson 1990.

1 Introduction

Dans ce cours on va introduire des outils mathématiques pour résoudre un problème d'optimisation dont la forme abstraite générale est la suivante :
Soit E un ensemble, $K \subset E$ et une application $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$, on veut résoudre le problème

$$(P) \qquad \begin{cases} x^\star \in K \\ J(x^*) = \inf_{x \in K} J(x) \end{cases}$$

On dit que (P) est un *problème d'optimisation* ou *problème de minimisation* de la fonction J sous la *contrainte* $x \in K$.
Si $K = E$ on a un *problème sans contrainte*. La fonction J est appelée *fonction coût*, *fonction objectif*, *fonction économique*.

En remplaçant J par $-J$ on transforme un problème de maximisation en problème de minimisation.

Un point x^* est un *minimum local* de J sur K s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x^* tel que $J(x^*) \leq J(x)$ pour tout $x \in K \cap \mathcal{V}$.
Un point x^* est un *minimum local strict* de J sur K s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x^* tel que $J(x^*) < J(x)$ pour tout $x \in K \cap \mathcal{V}$, $x \neq x^*$.

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de K est une *suite minimisante* si $\lim_{n \to +\infty} J(x_n) = \inf_{x \in K} J(x)$.
Une telle suite existe toujours, par définition de inf, par contre on ne sait rien au sujet de sa convergence éventuelle.

Pour résoudre le problème (P), il faut se poser les questions suivantes :

- Est-ce que $\inf_{x \in K} J(x)$ existe ? c.à.d. est-ce que J est bornée inférieurement ?

- Est-ce que l'infimum est atteint dans K ? c.à.d. est-ce qu'il existe $x^\star \in K$ vérifiant $J(x^*) = \min_{x \in K} J(x)$?

- Est-ce que $x^\star$ est unique ? Sinon, quelle est la taille de l'ensemble des solutions ?

- Est-ce que l'on peut caractériser $x^\star$? c.à.d. peut-on trouver des conditions nécessaires pour caractériser un minimum : «*si x vérifie (P), alors x vérifie la propriété $N(x)$*»
  et/ou trouver des conditions suffisantes pour être un point optimal :
  «*si x vérifie la propriété $S(x)$, alors x vérifie (P)*».

- Trouver un algorithme d'optimisation pour déterminer la, resp. les, solutions de (P).

Pour répondre à ces questions on est en particulier amené à étudier
- la structure de E : espace vectoriel, muni d'une norme, d'un produit scalaire, de dimension finie ou infinie, ...
- les propriétés de $K \subset E$: fermé, borné, convexe, ...
- les propriétés de $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$: continuité, différentiabilité, convexité, ...

Dans les chapitres suivants on va donner des éléments de réponse à ces questions.

Exemples :

• Un banquier explique à son client que pour être non imposables, les quantités x_i d'actions du type A_i $(i = 1, 2)$ doivent vérifier $3x_1 + x_2 \leq 3$. Or le client voulait $x_1 = 4$ et $x_2 = 1/3$. Que peut lui proposer le banquier comme solution non imposable, mais la "plus proche" de la répartition souhaitée par le client ?

L'ensemble de contraintes est $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 3x_1 + x_2 \leq 3\}$
et on cherche $(x_1^*, x_2^*) \in K$ qui minimise la distance de $(4, 1/3)$ à K.

• Un dispositif expérimental fournit aux instants $t_i \in \mathbb{R}$ les mesures $y_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m)$, or, pour le phénomène étudié, on a un modèle paramétrique $m(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j w_j(t)$ où les $x_j \in \mathbb{R}$ sont les paramètres et $w_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions réelles, linéairement indépendantes.

On veut adapter au mieux les paramètres du modèle aux données expérimentales, pour ceci on compare la mesure y_i à la valeur que donne le modèle $m(t_i)$ à l'instant t_i et on minimise leur écart. Sans hypothèses restrictives sur les paramètres $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on a un problème sans contraintes :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^{m} \left| y_i - \sum_{j=1}^{n} x_j w_j(t_i) \right|^2 \right) .$$

• Sur une période de temps fixé T, un individu peut choisir entre la consommation de deux biens X et Y pendant son temps libre. Son degré de satisfaction est mesuré par une fonction utilité u qui dépend de la durée du temps libre l et de la quantité de biens consommés, x et y.

On note P_X, resp. P_Y, le prix unitaire de X, resp. Y, et S le salaire par unité de temps. Si on suppose que le consommateur dépense tout son salaire dans la consommation de X et Y on a un problème d'optimisation avec contrainte égalité :

$$\begin{array}{l} \text{maximiser la fonction } u(x, y, l) \\ \text{sous la contrainte } \; P_X x + P_Y y = (T - l)S \,. \end{array}$$

Les prix P_X, P_Y et le salaire S sont les *variables exogènes*, tandis que la quantité de biens consommés x, y et le temps libre l sont les *variables endogènes* de ce modèle.

• Un réseau informatique possède trois points d'accès : A, B et C avec entre A et B une liaison avec une bande passante maximale c_1 et entre B et C une bande passante maximale c_2. Trois utilisateurs ont des données à transférer : le premier entre A et B la quantité x_1, le second entre B et C la quantité x_2 et le dernier veut transmettre la quantité x_3 de C vers A. Chaque utilisateur à sa fonction de satisfaction $u_i(x_i)$.

En supposant les bandes passantes comme étant additives, on veut

$$\begin{array}{l} \text{maximiser la fonction } u(x_1, x_2, x_3) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} u_i(x_i) \\ \text{sous les contraintes inégalités } \; x_1 + x_3 \leq c_1 \; \text{ et } \; x_2 + x_3 \leq c_2 \,. \end{array}$$

Si l'ingénieur système veut que le réseau tourne en régime maximal, on obtient des contraintes égalités : $x_1 + x_3 = c_1$ et $x_2 + x_3 = c_2$.

2 Espace vectoriels normés

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ce sera le cas pour toute la suite de ce cours).

DÉFINITION 2.1
Une norme sur E est une application $x \mapsto \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\begin{array}{rl} (i) & \forall x \in E \ : \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = O_E \\ (ii) & \forall x \in E; \forall \lambda \in \mathbb{R} \ : \ \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \\ (iii) & \forall (x,y) \in E \times E \ : \ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{array}$$

Exemples :

1. Soit $E = \mathbb{R}^d$, pour $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ on définit les normes :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i| \ , \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad , \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i| \ .$$

   On a les inégalités classiques suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d : \ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \text{ et } \|x\|_1 \leq \sqrt{d} \|x\|_2 \leq d \|x\|_\infty \ .$$

2. Soit $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, l'espace vectoriel, de dimension infinie, des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[a,b]$. Pour $f \in E$ on définit les normes :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, dt \ , \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \quad , \quad \|f\|_\infty = \max_{[a,b]} |f(t)| \ .$$

   On a les inégalités :

$$\forall f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) : \ \|f\|_1 \leq \sqrt{b-a} \, \|f\|_2 \leq (b-a) \, \|f\|_\infty \ .$$

   Dans ce cas on n'a pas les inégalités inverses : Soit $n \geq 2$, posons, pour $x \in [0, 1/n]$, $f_n(x) = -2n^2 x + 2n$ et pour $x \in [1/n, 1]$, $f_n(x) = 0$. Alors $\|f_n\|_1 = 1$ et $\|f_n\|_\infty = 2n$, l'on ne peut avoir $\|f_n\|_\infty \leq c \cdot \|f_n\|_1$.

   Exercice : Étudier la suite de fonctions (f_n) de E, définie, pour $n \geq 3$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [0, \alpha_n] \\ \dfrac{t - \alpha_n}{\beta_n - \alpha_n} & \text{pour } x \in [\alpha_n, \beta_n] \quad \text{où } \alpha_n = 1/2 - 1/n \text{ et } \beta_n = 1/2 + 1/n. \\ 1 & \text{pour } x \in [\beta_n, 1] \end{cases}$$

   La suite de fonctions converge simplement vers la fonction $f \notin E$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [0, 1/2[\\ 1/2 & \text{pour } x = 1/2 \\ 1 & \text{pour } x \in]1/2, 1] \end{cases} \ .$$

   On a $\|f_n - f\|_1 \leq 1/n$, $\|f_n - f\|_2 \leq 1/\sqrt{n}$ et $\|f_n - f\|_\infty = 1/2$. On a donc convergence de f_n vers f pour $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$, mais pas convergence uniforme $\|.\|_\infty$.
   Les espaces $(E, \|.\|_1)$ et $(E, \|.\|_2)$ ne sont pas complets, tandis que $(E, \|.\|_\infty)$ est complet.

Proposition 2.1

Les applications $\begin{array}{rcl} E\times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$; $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda x \end{array}$; $\begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array}$

sont continues.

Proposition 2.2

Soient $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *des e.v.n.,* $\Phi : E \to F$ *une application linéaire, alors*

$$\Phi \text{ est continue} \Leftrightarrow \exists c > 0, \forall x \in E \, : \|\Phi(x)\|_F \leq c\|x\|_E \, .$$

Proposition 2.3

Soient $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *des e.v.n. On note* $L(E, F)$ *l'e.v. des applications linéaires continues de* E *dans* F.

Pour $f \in L(E, F)$ *on pose* $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F \, .$

Alors : (*i*) $f \mapsto \|f\|$ *est une norme sur* $L(E, F)$;

(*ii*) $\forall x \in E : \|f(x)\|_F \leq \|f\| \, \|x\|_E$;

(*iii*) $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup\limits_{x \in E, x \neq O_E} \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$

Application : Si $\dim E = n$ et $\dim F = m$ alors $f : E \to F$ linéaire est représenté par une matrice A de m lignes et n colonnes, on peut alors définir une *norme de matrice subordonnée aux normes vectorielles* par

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Ax\|_F = \sup_{x \in E, x \neq O_E} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \, .$$

Proposition 2.4

Soit $(E, \|.\|_E)$ *un e.v.n. On note* $E' = L(E, \mathbb{R})$ *l'e.v. des formes linéaires continues sur* E*, alors :*

Une forme linéaire $f \in E'$ *si et seulement si* $\ker f$ *est fermé dans* E.

3 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Proposition 3.1

Soit $(E, \|.\|)$ *un e.v. normé de dimension finie* d*, soit* $\{e_1, \ldots, e_d\}$ *une base de* E.

Alors l'application $\Phi :$ $\begin{array}{rcl} (\mathbb{R}^d, \|.\|_\infty) & \to & (E, \|.\|) \\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{d} \alpha_i e_i \end{array}$ *est une bijection continue.*

De plus Φ^{-1} *est aussi continue,* Φ *est donc un isomorphisme topologique de* $\mathbb{R}^d$ *sur* E.

Note : Grâce à l'isomorphisme Φ on obtient de nombreux corollaires qui facilitent la manipulation des e.v. de dimension finie.

COROLLAIRE 3.1
Sur un e.v. E de dimension finie toutes les normes sont équivalentes :

$$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E : c_1\|x\|' \leq \|x\| \leq c_2\|x\|' \ .$$

COROLLAIRE 3.2
Soit $(E, \|.\|)$ un e.v. normé de dimension finie, alors E est complet.

COROLLAIRE 3.3
Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des e.v.n., on suppose que E est de dimension finie. Alors toute application linéaire de E dans F est continue.

PROPOSITION 3.2
Soit $(E, \|.\|)$ un e.v.n., F un sous-espace vectoriel fermé dans $(E, \|.\|)$ et W un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors $W + F$ est un sous-espace vectoriel fermé dans $(E, \|.\|)$.

COROLLAIRE 3.4
Soit W un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un e.v.n. $(E, \|.\|)$, alors W est fermé dans $(E, \|.\|)$.

4 Espaces euclidiens. Espaces de Hilbert

Soit E un e.v. réel et $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique, *i.e.*

(1) $\forall (x, y) \in E^2 : \phi(x, y) = \phi(y, x)$;
(2) $\forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : \phi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 \phi(x_1, y) + \lambda_2 \phi(x_2, y)$;
(2') $\forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \forall (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 : \phi(x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \mu_1 \phi(x, y_1) + \mu_2 \phi(x, y_2)$.

On dit que ϕ est positive ou semi-définie positive si : $\forall x \in E : \phi(x, x) \geq 0$.
On dit que ϕ est non dégénérée si : $\forall x \in E : \phi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = O_E$.
Si ϕ est positive et non dégénérée, on dit que ϕ est définie positive.

DÉFINITION 4.1
Une forme symétrique, bilinéaire, définie positive ϕ est un produit scalaire sur E.
L'application $x \mapsto \phi(x, x)^{1/2}$ définit alors une norme sur E.

On note $\phi(x, y) =< x, y >= (x/y)$ et $< x, x >= \|x\|^2$.

DÉFINITION 4.2
- *Un e.v. E, muni d'un produit scalaire $< ., . >$ est un espace préhilbertien.*
- *Un espace préhilbertien $(E, < ., . >)$ est un espace de HILBERT s'il est complet pour la norme associée à $< ., . >$.*
- *Un e.v. E de dimension finie, muni d'un produit scalaire $< ., . >$ est un espace euclidien.*

Exemples

1. Soit $E = \mathbb{R}^d$, pour $x = (x_1, \dots, x_d), x = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ on définit :

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{d} x_i y_i \ , \quad < x, x >= \sum_{i=1}^{d} x_i^2 = \|x\|_2^2 \ .$$

   $(\mathbb{R}^d, < .,. >)$ est un espace euclidien.

2. Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, pour $f, g \in E$ on définit :

$$< f, g >= \int_a^b f(t)g(t)\, dt \ , \quad < f, f >= \int_a^b f(t)^2\, dt = \|f\|_2^2 \ .$$

   $(E, < .,. >)$ est un espace préhilbertien.

Proposition 4.1
Soit ϕ une forme bilinéaire, symétrique, on a les égalités suivantes :

- $\forall x, y \in E : \phi(x + y, x + y) = \phi(x, x) + 2\phi(x, y) + \phi(y, y)$;

- *Égalité de polarisation :*
  $$\forall x, y \in E : \phi(x + y, x + y) - \phi(x - y, x - y) = 4\phi(x, y) ;$$

- *Égalité du parallélogramme :*
  $$\forall x, y \in E : \phi(x + y, x + y) + \phi(x - y, x - y) = 2(\phi(x, x) + \phi(y, y)) \ .$$

Si ϕ est de plus positive, on a :

- *Inégalité de* Cauchy-Schwarz *:*
  $$\forall x, y \in E : |\phi(x, y)| \le \phi(x, x)^{1/2}\phi(y, y)^{1/2} ;$$

- *Inégalité de* Minkowsky *ou triangulaire :*
  $$\forall x, y \in E : \phi(x + y, x + y)^{1/2} \le \phi(x, x)^{1/2} + \phi(y, y)^{1/2} ;$$

Soit $(x, y) \in E$, si $\phi(x, y) = 0$ on dit que x et y sont <u>orthogonaux</u> pour ϕ.

Proposition 4.2
Soit $< .,. >$ un produit scalaire sur E, alors

- *on a $| < x, y > | =< x, x >^{1/2}< y, y >^{1/2}= \|x\| \, \|y\|$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$;*

- *l'inégalité de* Cauchy-Schwarz *permet de définir <u>l'angle</u>, $\sphericalangle(x, y)$, entre deux vecteurs non nuls x et y, tel que*
  $$< x, y >= \|x\| \, \|y\| \cos\Big(\sphericalangle(x, y)\Big).$$

- *$\forall y \in E :< x, y >= 0 \Leftrightarrow x = O_E$, c.à.d. le vecteur nul, O_E, est l'unique vecteur qui est orthogonal à tous les vecteurs de E.*

5 Théorème de projection

Définition 5.1
Soit E un e.v. réel et $K \subset E$, on dit que K est convexe si

$$\forall (x,y) \in K^2, \forall t \in [0,1] : t\,x + (1-t)\,y \in K\ .$$

On note encore $[x,y] \subset K$.

Théorème 5.1 (Projection sur un convexe fermé)
Soit $(E, <.,.>)$ un espace de Hilbert et $K \subset E$ un sous-ensemble convexe, fermé et non vide.
• *Pour tout $x \in E$, il existe un unique $x^* \in K$ tel que*

$$\|x - x^*\| = \min_{v \in K} \|x - v\| \qquad (1)$$

On note alors $x^* = P_K x$ la projection de x sur K, de plus (1) est équivalent à

$$(2) \qquad \begin{cases} x^* \in K \\ < x - x^*, v - x^* > \leq 0 \quad \forall v \in K \end{cases}$$

• *L'application $P_K : E \to K$ vérifie :*

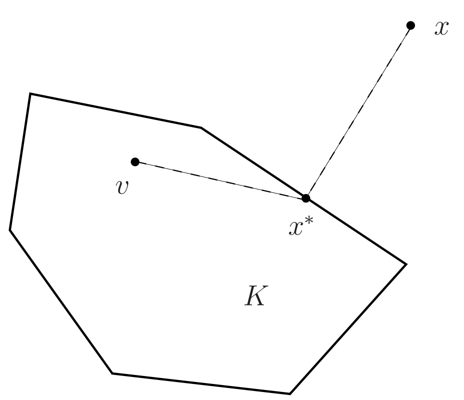
$$\forall (x,y) \in E^2 : \|P_K x - P_K y\| \leq \|x - y\|\ ,$$

c.à.d. la projection n'augmente pas les distances.

• *L'application $P_K : E \to K$ est linéaire si et seulement si K est un sous-espace vectoriel, dans ce cas (1) est équivalent à :*

$$(3) \qquad \begin{cases} x^* \in K \\ < x - x^*, v >= 0 \quad \forall v \in K \end{cases}$$

c.à.d. le vecteur $x - x^* = \overrightarrow{x^* x}$ est orthogonal à K.



5.1 Applications

Exemple 1 : On veut déterminer $\alpha = \min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2\, dt$.

On considère l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré deux
$$E = \{p : [0,1] \to \mathbb{R} \ / \ p(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0, (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3\}$$
que l'on munit du produit scalaire $< p, q >= \int_0^1 p(t)q(t)\, dt$.

$(E, < ., . >)$ est un espace euclidien et $K = \{u : [0,1] \to \mathbb{R} \ / \ u(t) = a_1 t + a_0, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie 2, c'est donc un sous-ensemble fermé, convexe.
Le problème initial s'écrit alors : chercher $\alpha = \min\limits_{u\in K} \|p - u\|_2^2$ pour $p(t) = t^2$.
D'après le théorème de la projection, il existe $P_K p = p^* \in K$ unique, vérifiant $\|p - p^*\|_2 = \min\limits_{v\in K} \|p - v\|_2$, la fonction affine p^* sera la projection orthogonale de $p(t) = t^2$ sur le plan vectoriel K.
On détermine facilement p^* en utilisant la caractérisation (3) :
$$\forall v \in K, 0 =< p - p^*, v >= \int_0^1 (t^2 - at - b)v(t)\, dt\,.$$

On prenant pour v les fonctions $t \mapsto 1$ et $t \mapsto t$ qui forment une base de K, l'on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} 1/2\, a + & b = 1/3 \\ 1/3\, a + & 1/2\, b = 1/4 \end{array}\right. \quad \text{d'où } a = 1\,, b = -1/6 \text{ et } \alpha = \|t^2 - P_K(t^2)\|^2 = \|t^2 - t + 1/6\|^2 = 1/180\,.$$

Exemple 2 : Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\|x\|_\infty > 1$, trouver le rayon r du plus grand disque fermé $\overline{B}_2(x, r)$ qui a un seul point de contact avec le carré $[-1, +1]^2$. Donner les coordonnées de ce point.
On considère ce problème dans l'espace euclidien standard $(\mathbb{R}^2, < ., . >)$,
$K = [-1, +1]^2$ est un ensemble fermé et convexe.
Si $y = (y_1, y_2) \in K$, alors la distance de x à y est $\|x - y\|$, le point cherché x^* vérifie donc $r = \|x - x^*\| = \min\limits_{y\in K} \|x - y\|$.

$$\text{Donc } x^* = (x_1^*, x_2^*) = P_K(x) \text{ existe et est unique, et } x_i^* = \left\{\begin{array}{ll} -1 & \text{si } x_i \leq -1 \\ x_i & \text{si } |x_i| \leq 1 \\ 1 & \text{si } x_i \geq 1 \end{array}\right. .$$

Noter que P_K n'est pas linéaire.

5.2 Méthode des moindres carrés

Résolution de systèmes linéaires.

Soit A une matrice de taille (m, n), $b \in \mathbb{R}^m$, on cherche à déterminer la solution $x \in \mathbb{R}^n$, du système linéaire à m équations et n inconnues : $Ax = b$.

Si $m = n$ et A inversible il existe une solution unique $x = A^{-1}b$;
si $m > n$ on a un problème *surdéterminé* et, en général, il n'existe aucune solution de l'équation $Ax = b$;

si $m < n$ on a un problème *sous-déterminé* et on peut avoir une infinité de solutions vérifiant le système linéaire.
On dit que $x^* \in \mathbb{R}^n$ est solution du système $Ax = b$ *au sens des moindres carrés* si x^* minimise $\|Ax - b\|_{2/\mathbb{R}^m}$.
Ici $E = \mathbb{R}^m$ et $K = \mathrm{Im}A$ s.e.v. de $\mathbb{R}^m$, donc fermé et convexe.

Approximation.
Dans le second exemple de la page 2, on a considéré le problème sans contraintes :

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^{m} \left| y_i - \sum_{j=1}^{n} x_j w_j(t_i) \right|^2 \right) .$$

C'est une minimisation *au sens des moindres carrés* qui revient à minimiser $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|y - Ax\|_{2/\mathbb{R}^m}$, où A est la matrice à m lignes et n colonnes, d'éléments $A_{i,j} = w_j(t_i)$.

Cas particulier : si $m(t) = x_1 + x_2\, t$, on veut adapter une droite aux nuage de points (t_i, y_i), on parle alors de *régression linéaire*.

Une interprétation statistique de la méthode des moindres carrés est donnée par l'exemple plus général suivant.

Maximum de vraisemblance.
Dans un dispositif expérimental on mesure aux instants t_i les données y_i $(1 \le i \le m)$, or le phénomène étudié est modélisé grâce à une fonction ϕ qui dépend du temps t et de paramètres $x \in \mathbb{R}^n$.
On note $\epsilon_i = y_i - \phi(x, t_i)$, la différence entre le modèle et les observations et l'on suppose que ces erreurs sont indépendantes et identiquement distribués (i.i.d.) de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et de densité $g_\sigma(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2}\right)$.
La vraisemblance des observations y_j, $j = 1,\ldots,m$, est donnée par

$$L(y; x, \sigma) = \prod_{i=1}^{m} g_\sigma(\epsilon_i) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{m}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \frac{(y_i - \phi(x, t_i))^2}{\sigma^2} \right) .$$

Pour obtenir le *maximum de vraisemblance*, à σ fixé, il faut déterminer

$$\min_x \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} (y_j - \phi(x, t_i))^2 ,$$

c.-à-d. résoudre un problème des moindres carrés non linéaire.
Ici $K = \{(\phi(x, t_1), \ldots, \phi(x, t_m)) \,/\, x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$ dépend de façon non linéaire de x à travers ϕ. On ne peut pas appliquer le théorème directement.

6 Adjoint d'un endomorphisme

LEMME 6.1
Soit $(E, <.,.>)$ un espace euclidien, f et g des applications de E dans E, on a :

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x,y) \in E^2 : < x, f(y) > = < x, g(y) > \ .$$

PROPOSITION 6.1
Soit $(E, <.,.>)$ un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.
Il existe un élément $u^* \in \mathcal{L}(E)$ unique, vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2 : < u(x), y > = < x, u^*(y) > \ .$$

On appelle u^* l'endomorphisme adjoint de u.

PROPOSITION 6.2
Soient u et v des éléments de $\mathcal{L}(E)$, α, β des réels, alors :

$$(\alpha\, u + \beta\, v)^* = \alpha\, u^* + \beta\, v^* \, ; \quad (u^*)^* = u \, ; \quad (u \circ v)^* = v^* \circ u^* \, ;$$

$$\ker u^* = (\mathrm{Im}\, u)^{\perp} \, ; \quad \mathrm{Im}\, u^* = (\ker u)^{\perp} \ .$$

DÉFINITION 6.1
Soit $(E, <.,.>)$ un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$:
- *u est dit autoadjoint ou symétrique si et seulement si $u^* = u$;*
- *u est dit orthogonal si et seulement si $u \circ u^* = Id_E$, resp. $u^* = u^{-1}$;*
- *u est dit antisymétrique si et seulement si $u^* = -u$;*
- *u est dit normal si et seulement si $u \circ u^* = u^* \circ u$.*

Remarques :
Un endomorphisme *autoadjoint* vérifie : $\forall (x,y) \in E^2 : < u(x), y > = < x, u(y) >$.
Un endomorphisme *orthogonal* vérifie : $\forall (x,y) \in E^2 : < u(x), u(y) > = < x, y >$.

PROPOSITION 6.3 (ÉCRITURE MATRICIELLE)
Soit $(E, <.,.>)$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E.
Au vecteur $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ on associe le vecteur de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n,1)$.
Soit ϕ une forme bilinéaire sur E^2, on note $\Phi = (\phi(e_i, e_j))_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}(n,n)$, la matrice associée à ϕ dans la base $\mathcal{B}$, alors

$$\forall (x,y) \in E^2 \ : \phi(x,y) = X^t \, \Phi \, Y \ .$$

En particulier, pour $S = (< e_i, e_j >)_{1 \le i,j \le n}$ on a : $< x, y > = X^t \, S \, Y$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $U = Mat_{\mathcal{B}} u$ et $U^* = Mat_{\mathcal{B}} u^*$, alors $U^* = S^{-1} \, U^t \, S$.

Cas particulier important :
la base $\mathcal{B}$ est <u>*orthonormée*</u>*, alors $S = I_n$,*

$$< x, y >= X^t\, Y \quad \text{et} \quad U^* = U^t\ .$$

Si u est autoadjoint, la matrice U est symétrique $U = U^t$.

Si u est orthogonal, la matrice U vérifie $U^t = U^{-1}$.

Les propriétés de la proposition 6.2 se traduisent matriciellement de façon évidente :

$$(U^t)^t = U \ \text{ et } \ (UV)^t = V^t\, U^t.$$

Proposition 6.4 (Réduction d'une forme quadratique)
Soit $(E, < .,. >)$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.
Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E^2 et q la forme quadratique associée définie, pour tout $x \in E$, par $q(x) = \phi(x, x)$.
La matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$, $\Phi \in \mathcal{M}(n, n)$, est réelle et symétrique. Elle admet n valeurs propres réelles $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ et les vecteurs propres associés $\{v_1, \ldots, v_n\}$ forment une base orthonormée de E. La matrice $P = (V_1 \cdots V_n)$, dont les colonnes sont composées des coordonnées des v_i est orthogonale, $P^{-1} = P^t$ et $P^t\, \Phi\, P = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

$$\text{On a, pour tout } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i v_i \text{ de } E : \qquad q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \Phi_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{x}_i^2\ ,$$

et

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq X^t\, \Phi\, X \leq \lambda_n \|x\|^2\ .$$

Si toutes les valeurs propres sont strictement positives, Φ, resp. q, est définie positive.
Si toutes les valeurs propres sont strictement négatives, Φ, resp. q, est définie négative.
Dans tous les autres cas, Φ, resp. q, change de signe ou s'annule.
En particulier, si 0 est valeur propre, Φ, resp. q, est dégénérée.

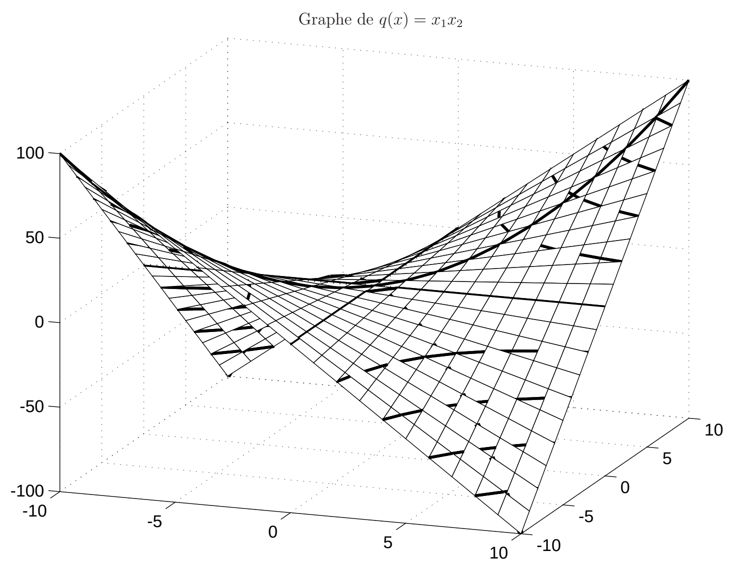
Exemple : Sur $\mathbb{R}^2$, la forme quadratique

$$q(x) = x_1 x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}\right)^2$$

change de signe et

$$\min_{\|x\|_2 \leq 1} q(x) = -1/2, \ \text{ atteint en } \left(+1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right) \text{ et } \left(-1/\sqrt{2}, +1/\sqrt{2}\right)\ ;$$

$$\max_{\|x\|_2 \leq 1} q(x) = +1/2, \ \text{ atteint en } \left(+1/\sqrt{2}, +1/\sqrt{2}\right) \text{ et } \left(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)\ .$$



7 Dérivée directionnelle, dérivées partielles, différentiabilité

Dans toute la suite on se place dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire standard et de la b.o.n. canonique $\{e_1, \dots, e_n\}$: $< x, y >= x^t\, y$ en identifiant x et X.

Définition 7.1
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Soit $a \in \Omega$ et $v \in \mathbb{R}^n$, la dérivée de f au point a, dans la direction v, est définie par

$$D_v f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(a + h\, v) - f(a)) \qquad (h \in \mathbb{R}) \ .$$

Si $v = e_i$, on obtient la dérivée partielle de f par rapport à la i^evariable, notée, $D_i f(a) \in \mathbb{R}^m$. Si $m = 1$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, on note aussi $D_i f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Définition 7.2
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. On dit que f est différentiable en $a \in \Omega$ s'il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ qui vérifie

$$\|f(a + u) - f(a) - L(u)\| = o(\|u\|) \qquad (u \in \mathbb{R}^n) \ .$$

On note $L = df_a$ la différentielle de f en a et $Df(a) \in \mathcal{M}(m, n)$ la matrice associée est appelée matrice jacobienne.

PROPOSITION 7.1
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ différentiable au point $a \in \Omega$, alors pour tout $v \in \mathbb{R}^n$:

$$D_v f(a) = df_a(v) \ = Df(a)\, v.$$

Si on note $f_1, \ldots, f_m$, les fonctions coordonnées de f, alors la matrice jacobienne s'écrit

$$\mathrm{D}f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Si $m = 1$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, on a : $Df(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$.

Note : la réciproque est fausse, il existe des fonctions pour lesquelles toutes les dérivées directionnelles existent et qui ne sont pas différentiables.

PROPOSITION 7.2
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable au point $a \in \Omega$, alors pour tout $v \in \mathbb{R}^n$:

$$D_v f(a) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = < \nabla f(a), v > = \nabla f(a)^t\, v$$

où $\nabla f(a) = (Df(a))^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$ *est le gradient de f au point a.*

Application : Soit $a \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en a, on a

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\|_2 = 1 : \quad |D_v f(a)| \leq \|\nabla f(a)\|_2$$

et

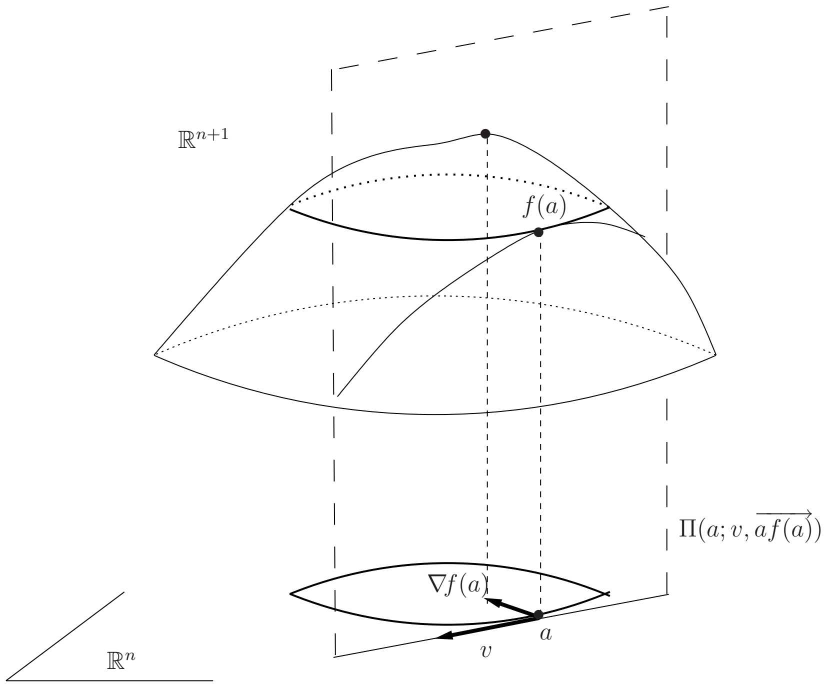
$$\min_{\|v\|_2=1} D_v f(a) = -\|\nabla f(a)\|_2 \text{ et est atteint en } v = -\nabla f(a)/\|\nabla f(a)\|_2 \,;$$

$$\max_{\|v\|_2=1} D_v f(a) = +\|\nabla f(a)\|_2 \text{ et est atteint en } v = +\nabla f(a)/\|\nabla f(a)\|_2 \,.$$

Au point a, la direction de la plus forte croissance de f est donné par $+\nabla f(a)$ et la direction de la plus forte descente est donné par $-\nabla f(a)$.
D'où les algorithmes de minimisation dits de "*descente de gradient*".

Dans la direction $\pm(\nabla f(a))^{\perp}$, $D_v f(a) = 0$, on reste à la même cote. On dit aussi que le gradient est perpendiculaire aux lignes de niveau $L_f(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, f(x) = \alpha\}$.

Si $\nabla f(a) = O$, a est un *point critique* et localement la fonction est plate.



Proposition 7.3
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ et $a \in \Omega$. Si au point a toutes les dérivées partielles $D_i f(a)$, $1 \leq i \leq n$, existent et si les fonctions $x \mapsto D_i f(x)$ $1 \leq i \leq n$, sont continues dans un voisinage de a, alors f est différentiable en a.
On dit que f est continûment différentiable, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, si on a continuité des d.p. en tout point de l'ouvert Ω.

Dans la suite, on va considérer des fonctions suffisamment régulières, c.-à-d. de *classe* $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$, ainsi ne se posera plus la question de différentiabilité.

Proposition 7.4
Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ des fonctions différentiables. On pose $h = g \circ f$, alors $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable et, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$:

$$dh_a = dg_{f(a)} \circ df_a$$

et

$$\begin{pmatrix} D_1 h_1(a) & \dots & D_n h_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 h_p(a) & \dots & D_n h_p(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 g_1(f(a)) & \dots & D_m g_1(f(a)) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 g_p(f(a)) & \dots & D_m g_p(f(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \dots & D_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(a) & \dots & D_n f_m(a) \end{pmatrix}.$$

Exemple : Si $n = p = 1$, $h(a) = g(f_1(a), \dots, f_m(a)) \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et

$$h'(a) = \sum_{i=1}^{m} D_i g(f(a))\, f_i'(a) .$$

PROPOSITION 7.5
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$ et on suppose que $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. La différentielle d'ordre 2, $d^2 f_a$ est une forme bilinéaire symétrique, dont la matrice s'écrit

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} D_{11}f(a) & D_{12}f(a) & \dots & D_{1n}f(a) \\ D_{21}f(a) & D_{22}f(a) & \dots & D_{2n}f(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{n1}f(a) & D_{n2}f(a) & \dots & D_{nn}f(a) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq, i, j \leq n} .$$

C'est la matrice hessienne de f en a, pour $h,\, k \in \mathbb{R}^n$: $d^2 f_a(h,k) = h^t\, H_f(a)\, k$.

Note : grâce à régularité $\mathcal{C}^2$ de f on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $1 \leq, i, j \leq n$.

PROPOSITION 7.6 (FORMULE DE TAYLOR À L'ORDRE 2)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$. On suppose que $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + df_a(h) + \tfrac{1}{2}\, d^2 f_a(h,h) + o(\|h\|^2) \\ &= f(a) + (\nabla f(a))^t\, h + \tfrac{1}{2}\, h^t\, H_f(a)\, h + o(\|h\|^2) \qquad (h \in \mathbb{R}^n) . \end{aligned}$$

Cas particulier : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a = (a_1, a_2)$ et $h = (h_1, h_2)$:

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = f(a_1, a_2) &+ \frac{\partial f}{\partial x_1} f(a) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} f(a) h_2 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(a) h_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(a) h_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) h_1 h_2 + o(h_1^2 + h_2^2) . \end{aligned}$$

Exemple :
On suppose que la fonction utilité u de l'exemple 3 de la page 2 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+)^3$. Pour des raisons de modélisation, on impose les propriétés qualitatives suivantes :

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} > 0\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} > 0\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial l} > 0\,;$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0\,, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0\,, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial l^2} < 0\,;$$

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial l} > 0\,, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial l} > 0\,;$$

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \qquad \text{est soit } > 0\,, \quad \text{soit } < 0 \text{ ou } = 0$$

Donner une interprétation de ces relations en termes de "satisfaction", "consommation", "biens" et "temps libre".

8 Caractérisation des points optimaux

Théorème 8.1 (Conditions nécessaires)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$.

1. *Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et si a est un minimum local de f, alors nécessairement $\nabla f(a) = 0$.*

2. *Si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et si a est un minimum local de f, alors nécessairement $H_f(a)$ est positive : $\forall x \in \mathbb{R}^n : x^t\, H_f(a)\, x \geq 0$.*

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^4 + y^4$ admet un minimum global en $(0, 0)$ et $H_f(0, 0)$ est la matrice nulle.

Théorème 8.2 (Conditions suffisantes)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $a \in \Omega$.
Si $\nabla f(a) = 0$ et $H_f(a)$ est définie positive, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : x^t\, H_f(a)\, x > 0$,
alors a est un minimum local strict de f.

Pour des *maxima locaux, resp. maxima locaux stricts*, on obtient le même type de caractérisation, la matrice hessienne sera négative, resp. définie négative.

Remarques :

1) Si au point critique a, *i.e.* $\nabla f(a) = 0$, la matrice $H_f(a)$ admet des valeurs propres strictement positives et strictement négatives, alors a est un *point selle*.

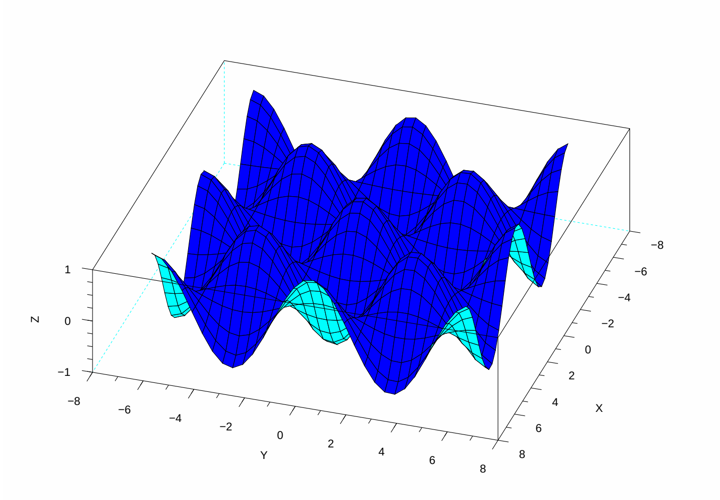
• pour la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f_1(x, y) = xy$ on a $H_{f_1}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
qui admet comme valeurs propres ± 1. En $(0, 0)$, f_1 admet un point selle, il n'y a pas de points extremums ;

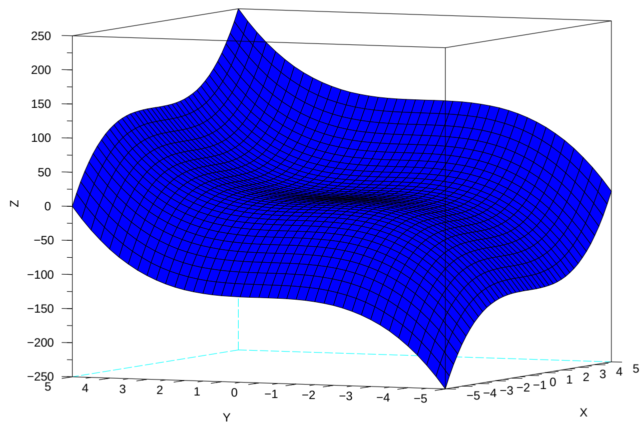
• la fonction f_2, définie pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ par $f_2(x, y) = \cos x \cos y$,
admet une infinité de minima locaux, de maxima locaux et de points selle.

2) Si au point critique a, la matrice hessienne admet une valeur propre nulle,
i.e. dét$H_f(a) = 0$, on ne peut pas conclure, il faut faire une étude adaptée.

• la fonction f_3, définie pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ par $f_3(x, y) = x^3 + y^3$,
admet $(0, 0)$ comme unique point critique, on a $H_{f_3}(0, 0) = O$. Comme $f_3(x, x) = 2x^3$ change de signe avec x, $(0, 0)$ est un point selle, f_3 n'admet aucun point extremum ;

• les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f_4(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + x^4 + y^4$ et
$f_5(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - x^4 - y^4$ ont la même matrice hessienne, positive, au point critique $(0, 0)$ qui admet comme valeurs propres 0 et 4.
Comme $f_4(x, y) = (x - y)^2 + x^4 + y^4$, il y a un minimum (global) en $(0, 0)$.
Par ailleurs, comme $f_5(x, x) = -2x^4$ et $f_5(x, -x) = 2x^2(2 - x^2)$, f_5 admet un point selle en $(0, 0)$.





Graphe de $f_2(x, y) = \cos x \cos y$ Graphe de $f_3(x, y) = x^3 + y^3$

Les résultats précédents fournissent des informations locales au sujet des extremums. Pour obtenir des informations globales, il faut imposer des propriétés plus fortes à la fonction à optimiser f et au domaine de définition Ω.

9 Fonctions convexes

Définition 9.1
Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe non vide et $f : C \to \mathbb{R}$.

– *On dit que f est une fonction convexe si pour tout $(x, y) \in C^2$ et pour tout $t \in]0, 1[$*

$$f(t\,x + (1-t)\,y) \leq t\,f(x) + (1-t)\,f(y)\ .$$

f est concave si $-f$ est convexe.

– *La fonction f est strictement convexe si pour tout $(x, y) \in C^2$, $x \neq y$, et pour tout $t \in]0, 1[$*

$$f(t\,x + (1-t)\,y) < t\,f(x) + (1-t)\,f(y)\ .$$

Note : une fonction est convexe, resp. strictement convexe, sur $C \subset \mathbb{R}^n$ si et seulement si sa restriction à tout segment inclus dans C est convexe, resp. strictement convexe.

Proposition 9.1 (Critères de convexité I)
Soit Ω un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$:

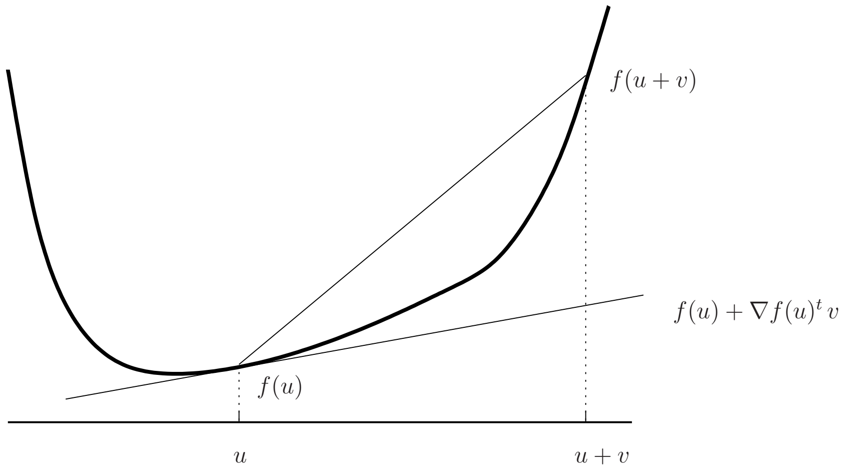
(a) f est convexe sur Ω si et seulement si

$$\forall u \in \Omega, \forall v \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } u + v \in \Omega : D_v f(u) = \nabla f(u)^t\, v \leq f(u+v) - f(u)\ ;$$

(b) f est strictement convexe sur Ω si et seulement si

$$\forall u \in \Omega, \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ tel que } u + v \in \Omega : D_v f(u) = \nabla f(u)^t\, v < f(u+v) - f(u)\ .$$

Ces inégalités expriment que le graphe de f est en chaque point au-dessus du plan tangent. Pour $n = 1$, la fonction f est convexe, resp. strictement convexe, si et seulement si f' est croissante, resp. strictement croissante.



Proposition 9.2 (Critères de convexité II)
Soit Ω un <u>ouvert convexe</u> non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$:

(a) f est convexe sur Ω si et seulement si $H_f(x)$ est positive pour tout $x \in \Omega$;

(b) si $H_f(x)$ est définie positive pour tout $x \in \Omega$, alors f est strictement convexe sur Ω.

Exemples :
• la fonction $f(x) = x^4$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$, sa dérivée $f'(x) = 4x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais $f''(0) = 0$;
• pour $g(x) = 1/x^2$, on a $g''(x) = 1/x^4 > 0$ sur l'ouvert, non convexe, $\mathbb{R}^*$ et g n'est pas une fonction convexe sur $\mathbb{R}^*$.

Les résultats suivants montrent comment la convexité permet d'obtenir des résultats globaux, resp. d'unicité, pour des problèmes d'optimisation.

Théorème 9.1
Soit C un convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to \mathbb{R}$ convexe, alors chaque minimum local de f est un minimum global sur C .

Théorème 9.2
Soit C un convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to \mathbb{R}$ strictement convexe, Si f admet un minimum dans C, alors ce minimum est global et unique dans C.

Théorème 9.3
Soit Ω un <u>ouvert convexe</u> non vide de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $f : C \to \mathbb{R}$ convexe sur Ω, alors

$$\nabla f(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \text{ est un minimum global.}$$

Théorème 9.4
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on suppose qu'il existe $\nu > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathbb{R}^n \ : \quad u^t \, H_f(x) \, u \geq \nu \, \|u\|_2^2 \, .$$

Alors f admet un minimum global unique sur $\mathbb{R}^n$

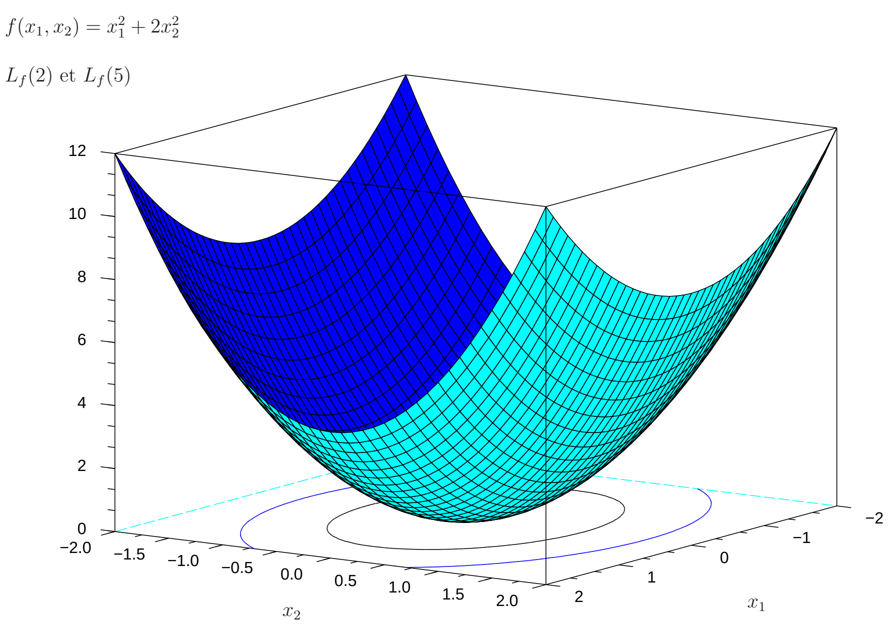
Remarque :
Dans les hypothèses du théorème précédent, le réel strictement positif ν est un minorant uniforme en x, sur $\mathbb{R}^n$, de toutes les valeurs propres des matrices hessiennes $H_f(x)$.

Exemple fondamental :
Soit A une matrice réelle, symétrique d'ordre n, b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et c un réel, on définit la *fonction quadratique* f, sur $\mathbb{R}^n$, par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ : \quad f(x) = \frac{1}{2} \, x^t \, A \, x + b^t \, x + c \, .$$

On calcule $\nabla f(x) = Ax + b$ et $H_f(x) = A$.

Si A est définie positive, resp définie négatives, la fonction f admet un minimum, resp. maximum, unique sur $\mathbb{R}^n$. L'extremum est atteint au point x, solution du système linéaire $Ax = b$, c.-à-d., $x = A^{-1}b$.



10 Multiplicateurs de Lagrange

Dans les sections précédentes, on a optimisé une fonction sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, or dans beaucoup d'applications les contraintes du problème imposent des domaines fermés. Dans ce cas les critères de caractérisation précédents ne s'appliquent pas.
On va présenter dans cette section des résultats pour un type particulier de contraintes.

Exemple : Étudier $\displaystyle\min_{x^2+y^2=1} xy$, $\displaystyle\min_{x^2+y^2\leq 1} xy$ et $\displaystyle\min_{x^2+y^2<1} xy$.

• On pose $\mathcal{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2=1\}$. Comme $\mathcal{S}^1$ est fermé et borné, c'est un compact de $\mathbb{R}^2$; $f(x,y) = xy$ étant continue sur ce compact, y atteint ses bornes.
On a montré que le minimum est atteint en $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ et $-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et qu'il vaut $-1/2$;

• L'ensemble $\overline{B(0,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq 1\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$, donc la fonction f y atteint son minimum. On vérifie que le minimum est uniquement atteint sur le bord, $\mathcal{S}^1$;

• L'ensemble $B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 < 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et l'unique point critique de f est $(0,0)$. Or c'est un point selle. Sur $B(0,1)$, f n'atteint pas sa borne inférieure, qui vaut $-1/2$.

Proposition 10.1
Soient $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathcal{A} \cap \Omega$.
On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et l'on suppose que a est un extremum local de f sur $\mathcal{A}$: $\displaystyle f(a) = \min_{x\in\mathcal{A}\cap V_a} f(x)$ *ou* $\displaystyle f(a) = \max_{x\in\mathcal{A}\cap V_a} f(x)$,
avec V_a un voisinage ouvert de a dans Ω.

• *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle avec $0 \in I$, on considère une courbe paramétrée $X : I \to \mathcal{A}$ vérifiant : $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{A})$ et $X(0) = a$. Alors*

$$\nabla f(a) \text{ est orthogonal à } X'(0).$$

• *Pour tous les chemins X inclus dans $\mathcal{A}$ et vérifiant $X(0) = a$, $\nabla f(a)$ est orthogonal aux vecteurs tangents $X'(0)$:*

$$\nabla f(a) \text{ est normal à “l'espace tangent” à } \mathcal{A} \text{ en } a.$$

Cette proposition motive les définitions suivantes :

Définition 10.1
Soient $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathcal{A}$.

1. *L'espace tangent en a au sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^n$, est défini comme étant le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par tous les vecteurs tangents $X'(0)$ des courbes paramétrées $X : I \to \mathcal{A}$ vérifiant : $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{A})$ et $X(0) = a$.*
2. *Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathcal{A} \cap \Omega$.*
   Alors a est un point critique de f sur $\mathcal{A}$ si $\nabla f(a)$ est orthogonal à l'espace tangent en a à $\mathcal{A}$.

Exemples :

• Soit $\mathcal{A} = \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$ un extremum local de f, alors $\nabla f(a)$ est orthogonal à toutes les tangentes aux chemins passant par a.
Soit $X(t) = a + t\,v$, où $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ quelconque. Alors $X(0) = a$ et $X'(t) = v$, donc $< \nabla f(a), v >= D_v f(a) = 0$, pour tout $v \neq 0$ et l'on retrouve la condition nécessaire : $\nabla f(a) = 0$.
Ici le l'espace tangent est le s.e.v. trivial $\mathbb{R}^n$, l'unique vecteur dans $(\mathbb{R}^n)^{\perp}$ est 0.

• Soit $\mathcal{A} = S^2(0,1) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
L'ensemble $\mathcal{A}$ étant compact et f continue, on déduit que f atteint son minimum et maximum sur $\mathcal{A}$.

Si a est un extremum de f sur $\mathcal{A}$, alors $\nabla f(a)$ est perpendiculaire à tout chemin de $\mathcal{A}$ passant par a.
Or $a \in S^2(0,1)$ est un vecteur perpendiculaire à $S^2(0,1)$, d'où $\nabla f(a)$ et a sont colinéaires : $\nabla f(a) = \lambda\, a$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On obtient ainsi 4 équations scalaires qui permettent qui sont nécessairement vérifiées par les extremums de f sur $\mathcal{A}$.

L'espace tangent à $S^2(0,1)$ en a est le plan vectoriel Π_a, engendré par les vecteurs perpendiculaires à a ; le plan affine $a + \Pi_a$ est tangent à la sphère au point a.

Dans les théorèmes suivants, l'ensemble $\mathcal{A}$ est défini de façon implicite comme étant l'ensemble des points x annulant une fonction régulière g.

Théorème 10.1 (Conditions nécessaires. 1 contrainte)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f et g des fonctions continûment différentiables de Ω dans $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in \Omega \,/\, g(x) = 0\}$.
Soit $a \in \mathcal{A}$ tel que $\nabla g(a) \neq 0$, alors, si la restriction de f à $\mathcal{A}$ présente un extremum au point a, il existe un réel λ tel que :

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a).$$

Application : Ce théorème permet de trouver tous les points candidats à être solution des problèmes $\min\limits_{x \in \mathcal{A}} f(x)$ ou $\max\limits_{x \in \mathcal{A}} f(x)$.
Ils doivent nécessairement vérifier les $n+1$ équations scalaires :

$$(\nabla f(a))_i = \lambda\, (\nabla g(a))_i \,,\ 1 \leq i \leq n \qquad \text{et} \qquad g(x) = 0\,.$$

Ce sont les points critiques du *Lagrangien* : $\quad L(x, \lambda) = f(x) - \lambda\, g(x)\,.$
Parmi les solutions $(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$, on retient celles qui minimisent, resp. maximisent, f sur $\mathcal{A}$.

Exemple :

La fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ par $g(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ permet de définir $S^2(0,1)$ comme l'ensemble des x annulant g.
Soit a vérifiant $g(a) = 0$, on a $(\nabla g(a))_i = 2\, a_i$, $1 \leq i \leq 3$.
On retrouve le résultat : $\nabla f(a) = \tilde{\lambda}\, a$, pour $\tilde{\lambda} = 2\lambda \in \mathbb{R}$, comme condition nécessaire pour que a soit extremum de f sur $S^2(0,1)$.

Théorème 10.2 (Conditions nécessaires. k contraintes)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f, g_1, \ldots, g_k$ des fonctions continûment différentiables de Ω dans $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in \Omega \,/\, g_1(x) = \cdots = g_k(x) = 0\}$.

Soit $a \in \mathcal{A}$ tel que les vecteurs $\nabla g_1(a)$, ..., $\nabla g_k(a)$ sont linéairement indépendants, en particulier $k \le n$.

Alors, si la restriction de f à $\mathcal{A}$ présente un extremum au point a, il existe k réels λ_1, ..., λ_k tels que :

$$\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla g_1(a) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(a) .$$

Application : Ce théorème permet de trouver tous les points candidats à être solution de $\min_{x \in \mathcal{A}} f(x)$ ou $\max_{x \in \mathcal{A}} f(x)$.
Ils doivent nécessairement vérifier les $n + k$ équations scalaires :

$$(\nabla f(a))_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, (\nabla g_j(a))_i \,, \; 1 \le i \le n \qquad \text{et} \qquad g_j(x) = 0 \,, \; 1 \le j \le k \,.$$

Ce sont les points critiques du *Lagrangien* : $\quad L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, g_j(x)$

où $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$.
Parmi les solutions $(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, on ne retient que celles qui minimisent, resp. maximisent, f sur $\mathcal{A}$.

Sous des hypothèses supplémentaires, le Lagrangien permet de donner une condition suffisante caractérisant un extremum de f sur $\mathcal{A}$.

Théorème 10.3 (Conditions suffisantes. k contraintes)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f, g_1, \ldots, g_k$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$.
On considère l'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in \Omega \,/\, g_1(x) = \cdots = g_k(x) = 0\}$.
Soit $a \in \mathcal{A}$ tel que les vecteurs $\nabla g_1(a)$, ..., $\nabla g_k(a)$ sont linéairement indépendants

et soit $(a, \lambda) \in \mathcal{A} \times \mathbb{R}^k$ un point critique de $L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, g_j(x)$,

on définit la matrice symétrique de taille (n, n) :

$$Q_L(a, \lambda) = H_f(a) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, H_{g_j}(a) .$$

et la forme quadratique $q(h) = h^t \, Q_L(a, \lambda) \, h$, pour $h \in \mathbb{R}^n$.
Si, pour tout h vérifiant $< \nabla g_j(a), h >= 0$, $1 \le j \le k$, on a
- *$q(h) > 0$, alors a est un minimum relatif strict de f sur $\mathcal{A}$;*
- *$q(h) < 0$, alors a est un maximum relatif strict de f sur $\mathcal{A}$;*
- *$q(h)$ qui prend des valeurs positives et négatives, alors a n'est pas un extremum de f ;*
- *soit $q(h) \ge 0$, soit $q(h) \le 0$, on ne peut pas conclure.*

Note : $h \in \mathbb{R}^n$ vérifie $< \nabla g_j(a), h >= 0$, $1 \le j \le k$, si et seulement si $h \in \Pi_a$, l'espace tangent en a à $\mathcal{A}$.