Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

PARIS DESCARTES

Licence 3e année, 2009–2010

Optimisation

Correction du partiel du 24-11-009

Question de cours

1. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ il existe un unique endomorphisme adjoint u^* qui vérifie : $\forall (x,y) \in E^2 :< u(x), y >=< x, u^*(y) >$.
2. Pour $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $x, y \in E$ on a : $< (u \circ v)(x), y >=< x, (u \circ v)^*(y) >$.
   Par ailleurs $< (u \circ v)(x), y >=< u(v(x)), y >=< v(x), u^*(y) >=< x, v^*(u^*(y)) >$.
   D'où $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

Exercice 1.

1. Pour $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $b(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + px_2y_2$ et $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & p \end{pmatrix}$.
   En effectuant la réduction de q, l'on peut facilement écrire : $q(x) = (x_1 + x_2)^2 + (p-1)x_2^2$.
   Sous cette forme, on vérifie facilement que q est définie positive ssi $p - 1 > 0$:
   Si $p > 1$, $q(x)$ est positif pour tout x et ne s'annulle que pour $x = (0,0)$. Réciproquement, on a $q(\alpha, 1) = (\alpha + 1)^2 + (p - 1)$, $q(\alpha, 0) = \alpha^2$ et $q(\alpha, -\alpha) = (p-1)\alpha^2$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Ces valeurs particulières permettent de prouver que q n'est pas définie, respectivement, pas positive, pour $p \leq 1$.
   Remarque : le calcul des valeurs propres de Φ est légèrement plus compliqué mais donne bien sûr le même résultat.
   Pour $p = 2$ on a $q(x) = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$.
2. Le produit scalaire se déduit de $b(x,y)$ et
   $$[x|y] = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 = x_1(y_1 + y_2) + x_2(y_1 + 2y_2)\,.$$
3. Il suffit d'écrire que pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on a
   $$J(x) = x_1 + x_2 = [x|\beta] = x_1(\beta_1 + \beta_2) + x_2(\beta_1 + 2\beta_2)\,.$$
   Par identification, on déduit que $\beta_1 + \beta_2 = 1$ et $\beta_1 + 2\beta_2 = 1$, d'où $\beta = (1, 0)$.
4. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad -q(x)^{1/2}q(\beta)^{1/2} \leq J(x) = [x|\beta] \leq q(x)^{1/2}q(\beta)^{1/2},$$
   donc
   $$\forall x \in S \quad -q(\beta)^{1/2} \leq J(x) = [x|\beta] \leq q(\beta)^{1/2}.$$
   Les bornes de J sur S sont atteintes lorsqu'on a l'égalité dans Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire pour $x^* = \lambda\beta$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Comme $x^* \in S$, on a $q(x^*) = q(\lambda\beta) = 1$, soit $\lambda^2 = \dfrac{1}{q(\beta)} = 1$.
   Pour $x_+^* = +\beta$, $J(x_+^*) = +1$ et pour $x_-^* = -\beta$, $J(x_-^*) = -1$.

Exercice 2

1. Il faut montrer que $< .,. >$ est une forme bilinéaire définie positive.
   (i) symétrie, pour p et q dans E, on vérifie facilement que $< p,q >=< q,p >$.
   (ii) linéarité par rapport à la première variable, pour p, $\tilde{p}$ et q dans E, $(\alpha,\tilde{\alpha}) \in \mathbb{R}^2$, on montre, grâce à la linéarité de l'intégration et de la dérivation $< \alpha\, p + \tilde{\alpha}\, \tilde{p}, q >= \alpha < p,q > + \tilde{\alpha} < \tilde{p}, q >$.
   (iii) positive, pour tout $p \in E$, on a
$$< p,p >= \int_{-1}^{1} p(t)^2\, dt + \int_{-1}^{1} p'(t)^2\, dt \geq 0 \ .$$
   (iv) définie positive, pour $p \in E$, on déduit de $< p,p >= 0$ que l'intégrale sur $[-1,+1]$ de la fonction continue et positive $t \mapsto p(t)^2$ est nulle. De ceci découle que $p(t) = 0$ pour $t \in [-1,+1]$.
2. Soit p un polynôme pair et i un polynôme impair, alors la fonction $t \mapsto p(t)i(t)$ est impaire et son intégrale sur l'intervalle $[-1,+1]$ est nulle.
   Par ailleurs, en dérivant p et i, on constate facilement que p' est un polynôme impair et i' un polynôme pair, la fonction $t \mapsto p'(t)i'(t)$ est aussi impaire et son intégrale sur $[-1,+1]$ est nulle.
   Finalement, $< p,i >= 0$, les polynômes pairs et impairs sont orthogonaux.
3. Il est immédiat de vérifier que F est stable par combinaisons linéaires : la somme de deux polynômes de dégré inférieur ou égal à un est encore un polynôme de dégré inférieur ou égal. De même pour la multiplication avec un scalaire réel. $F \subset E$ est donc un s.e.v. de E.
   La base canonique de F est (e_0, e_1) où $e_0(t) = 1$ et $e_1(t) = t$, pour tout $t \in [-1,1]$. La dimension de F est donc 2.
   Comme e_0 est un polynôme pair, tandis que e_1 est un polynôme impair, d'après 2., il vient $< e_0, e_1 >= 0$.
   Par ailleurs, $< e_0, e_0 >= 2$ et $< e_1, e_1 >= \frac{8}{3}$, en posant
$$p_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad p_1(t) = \sqrt{\frac{3}{8}}t$$
   on obtient une b.o.n. de l'espace euclidien $(F, < .,. >)$.
4. Comme $P_F(q) \in F$, il existe $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P_F(q) = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1$. Pour $0 \leq i \leq 1$ on a
$$< P_F(q), p_i >= \alpha_0 < p_0, p_i > + \alpha_1 < p_1, p_i >= \alpha_i \ .$$
   Par ailleurs, comme $P_F(q)$ est la projection orthogonale de q sur F on a, pour $0 \leq i \leq 1$
$$0 =< q - P_F(q), p_i >=< q, p_i > - < P_F(q), p_i > \quad \text{c.-à-d.} \quad \alpha_i =< q, p_i > \ .$$
   On a donc $P_F(q) = \langle q, p_0 \rangle p_0 + \langle q, p_1 \rangle p_1$.
   On peut noter que, p_1 étant impair et q pair, on a $\alpha_1 =< q, p_1 >= 0$.
5. On a
$$\|q\|^2 =< q,q >= \frac{2}{5} + 4\frac{2}{3} = \frac{46}{15} \quad \text{et} \quad \|P_F(q)\|^2 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} \ .$$
   Comme $q = (q - P_F(q)) + P_F(q)$,
$$\|q - P_F(q)\|^2 = \|q\|^2 - \|P_F(q)\|^2 = \frac{46}{15} - \frac{2}{9} = \frac{128}{45} \ .$$
6. On considère l'espace euclidien $(E, < .,. >)$ et le convexe F. On constate alors que
$$I(a_0, b_0) = \inf_{p(t)=at+b \in F} \|q - p\| \ .$$
   Le théorème de la projection sur un convexe stipule que
$$I(a_0, b_0) = \|q - P_F(q)\| = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$$
   en plus $a_0 = \sqrt{2}/3$ et $b_0 = 0$