Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 3$^{\text{e}}$ année, 2009–2010

Optimisation

Correction de l'examen du 13-01-2010

Exercice 1.

1. Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$b(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \,.$$

   Pour $y = x$, on a bien $q(x) = b(x, x)$.
   Par ailleurs, b est symétrique car $b(x, y) = b(y, x)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^3$. Pour montrer que b est bilinéaire, il suffit donc de vérifier la linéarité par rapport à la 1ère variable. Soit $x, x', y \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$, un simple calcul (à faire) permet de vérifier que $b(\alpha x + \alpha' x', y) = \alpha b(x, y) + \alpha' b(x', y)$.
   On a ainsi montré que q est une forme quadratique.

   La matrice Φ est donnée par $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   On peut écrire q sous forme réduite, pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $q(x) = (x_1^2 + 2x_2)^2 - 3x_2^2 + x_3^2$
   Comme $q(1, 0, 0) = 1 > 0$ et $q(-1/1/2, 0) = -3/4 < 0$, on peut affirmer que q n'est ni définie positive, ni définie négative.

2. Les valeurs propres de Φ sont obtenues par l'équation suivante :

$$0 = \det(\Phi - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda)$$

   On obtient les valeurs propres -1, 1 et 3, pour trouver des vecteurs propres orthonormés, il suffit alors de trouver une solution du système linéaire 3×3, $\Phi\, v = \lambda\, v$ et de garder $v/\|v\|_2$.
   Un simple calcul (à faire) donne, $v_{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Il faut montrer que q est non bornée sur $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune constante $K \in \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $|q(x)| \leq K$.
   Or $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} q(0, 0, \alpha) = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \alpha^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} q(-2\alpha, \alpha, 0) = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} -3\alpha^2 = -\infty$, donc q n'est bornée ni inférieurement, ni supérieurement.

4. On peut d'abord noter que S est un compact, comme q est une fonction continue, on peut affirmer que q atteint son maximum et son minimum sur S. Il reste à les déterminer.

En appliquant la proposition 6.4 du cours, on peut écrire,

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \quad (-1)\|x\|_2^2 \leq q(x) \leq 3\|x\|_2^2 .$$

Pour $x \in S$, $\|x\|_2 = 1$, on a donc $-1 \leq q(x) \leq 3$. En plus, $q(\pm v_{-1}) = -1$ et $q(\pm v_3) = 3$.
On a donc bien montré que q atteint son maximum sur S en $\pm v_3$ et son minimum en $\pm v_{-1}$.

Exercice 2

1. Les points critiques de f vérifient $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   Or $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2+1} \\ \frac{2y}{x^2+y^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a comme solution unique le point $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Pour déterminer la nature du point critique, on calcule $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-2x^2+2y^2+2}{(x^2+y^2+1)^2} & \frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2} \\ \frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2} & \frac{2x^2-2y^2+2}{(x^2+y^2+1)^2} \end{pmatrix}$,

   donc $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. C'est une matrice diagonale, elle admet 2 comme valeur propre double. $H_f(0,0)$ est définie positive.

   On peut donc affirmer que le point $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un minimum local strict de f sur $\mathbb{R}^2$.

2. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a : $x^2 + y^2 \geq 0$, d'où $x^2 + y^2 + 1 \geq 1$.
   Comme le logarithme est une fonction croissante, on en déduit que $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Le minimum local $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est donc un minimum global.

Exercice 3

1. Il faut déterminer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} \\ -\frac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Cette équation n'admet aucune solution ! En effet, $1/x > 0$, pour tout $x > 0$, de même pour y. La fonction n'a pas de point critique et donc pas d'extremum local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, donc pas d'extremum.

   Note : g non bornée n'entraîne pas qu'il n' y a pas d'extremums locaux !

2. La ligne de niveau $L_g(c)$ est l'ensemble des $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ vérifiant l'équation

   $$g(x,y) = -\ln x - \ln y = c \Leftrightarrow \ln(xy) = -c \Leftrightarrow xy = e^{-c} \Leftrightarrow y = \frac{e^{-c}}{x} .$$

   Les équivalences ci-dessus sont vraies car $x > 0$ et $y > 0$! On obtient donc l'équation d'une hyperbole pour $L_g(c)$.
   Pour $c = 0$, le graphe de $L_g(0)$ est donné par $y = \frac{1}{x}$.

   La ligne de niveau passant par le point $(x,y) = (2,2)$ est obtenu par $L_g(g(2,2)) = L_g(-\ln 2^2)$, le graphe a comme équation $y = \frac{4}{x}$.
   De même, la ligne de niveau passant par le point $(x,y) = (1/3, 1/3)$ est obtenu par $L_g(g(1/3,1/3)) = L_g(-\ln \frac{1}{3^2})$, le graphe a comme équation $y = \frac{1}{9x}$, voir la figure.
3. On a

   $$d(x,y) = -\frac{1}{2\|\nabla g(x,y)\|} \nabla g(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \end{pmatrix} = \frac{xy}{2\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\|(x,y)\|_2} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

   Les vecteurs d aux points $(x,y) = (1,1)$, $(2,2)$ et $(1/3, 1/3)$ sont reportés sur la figure.
   Ils indiquent la direction opposée au gradient en ces points, c'est donc la direction de la plus forte descente.

4. Les droites $y = 2x - 2$ et $y = x/2 + 1$ sont reportées sur la figure. L'<u>intérieur</u> du domaine D est haché en rouge. Font partie de D aussi les segments semi-fermés $](1,0),(2,2)]$ et $](0,1),(2,2)]$.

   Attention, les points $(0,y)$, $0 \le y \le 1$ et $(x,0)$, $0 \le x \le 1$, ne font pas partie de D !

5. D'après la question précédente, le domaine D n'est ni ouvert, ni fermé ! On ne peut donc pas immédiatement appliquer un théorème.

   D'après 1., il n'y a pas d'extremum local sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, on en déduit que la fonction g n'admet pas de minimum dans l'intérieur de D.

   Il reste à étudier g sur les segments semi-fermés $](1,0),(2,2)]$ et $](0,1),(2,2)]$.
   Sur $](0,1),(2,2)]$, $0 < x \le 2$ et $y = x/2 + 1$. Il suffit d'étudier la fonction à une variable $\varphi : x \mapsto g(x, x/2+1) = -\ln x - \ln(x/2+1)$. Un simple calcul (à faire) donne $\varphi'(x) = -\dfrac{2(x+1)}{x(x+2)}$.
   Sur $]0,2]$, $\varphi(x)$ est décroissante et atteint son minimum en $x = 2$, $\varphi(2) = -\ln 4$.
   De même, sur $](1,0),(2,2)]$, $1 < x \le 2$ et $y = 2x - 2$. On étudie $\psi : x \mapsto g(x, 2x-2) = -\ln x - \ln(2x-2)$. On trouve $\psi'(x) = -\dfrac{2x-1}{x(x-1)}$.
   Sur $]1,2]$, ψ est décroissante et atteint son minimum en $x = 2$, $\psi(2) = -\ln 4$.

   On peut donc conclure que la fonction g atteint son minimum sur D au point $(2,2)$ et $g(2,2) = -\ln 4$.

6. On vérifie facilement que $g(x,y)$ tend vers $+\infty$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$ dans D. Ceci suffit pour affirmer que g n'admet pas de maximum sur D.