Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 3^e année, 2007–2008

OPTIMISATION

Corrigé de l'examen du 15 janvier 2008

Exercice 1

1. Les contraintes sur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se lisent à partir de la définition même de la fonction : $x >$, $y > 0$, $1 - x > 0$ et $1 - y > 0$, ce qui entraîne $(x, y) \in \Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ le carré unité ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Le vecteur gradient s'obtient en calculant les dérivées partielles d'ordre 1 et on trouve :
$\nabla f(x, y) = -\begin{pmatrix} \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{1-y} \end{pmatrix}$.
La matrice hessienne s'obtient en calculant les dérivées partielles d'ordre 2 et on trouve :
$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(1-y)^2} \end{pmatrix}$.
3. La matrice hessienne est diagonale, on peut donc y lire ses valeurs propres. Elles sont définies pour tout $(x, y) \in \Omega$ et sont strictement positives, donc pour tout $(x, y) \in \Omega$ la matrice $H_f(x, y)$ est définie positive.
4. L'équation $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ admet comme solution unique $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

   La matrice hessienne $H_f(1/2, 1/2)$ étant défine positive, ce point critique est un minimum local strict de f sur Ω.

   Note : la fonction étant convexe, resp. comme f tend vers $+\infty$ quand (x, y) tend vers le bord de l'ouvert Ω, on montre que le point $(1/2, 1/2)$ est le minimum absolu de f sur Ω.
5. On peut écrire $g(x, y) = xy(1 - x)(1 - y)$, or maximiser g sur Ω revient à minimiser f sur Ω, donc $\max\limits_{(x,y)\in\Omega} g(x, y) = g(1/2, 1/2) = 1/2^4$.

Exercice 2

1. La forme bilinéaire associée à q s'écrit, pour x et y dans $\mathbb{R}^6$:
$$b(x, y) = \frac{1}{2}\Big(x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 + x_4y_3 + x_5y_6 + x_6y_5\Big) = x^t\, B\, y.$$
où la matrice symétrique B est donnée par $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On en déduit immédiatment que b est une forme bilinéaire symétrique et $q(x) = b(x, x) = x^t\, B\, x$ est une forme quadratique.

Pour montrer que q est définie positive, on peut écrire :

$$q(x) = \frac{1}{4}\Big((x_1+x_2)^2-(x_1-x_2)^2+(x_3+x_4)^2-(x_3-x_4)^2+(x_5+x_6)^2-(x_5-x_6)^2\Big).$$

On en déduit que q n'est ni positivie, ni négative et qu'elle est dégénérée, des contre-exemples bien choisis donnent la même conclusion, par exemple : $q(1,1,1,1,1,1) = 3$, $q(1,-1,1,-1,1,-1) = -3$ et $q(1,0,1,0,1,0) = 0$.

2. Soit $v = (1,1,1,1,1,1)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

   $J(\lambda v) = 3\lambda^2 - \lambda\left(\sum_{i=1}^{6} \alpha_i\right) \to +\infty$ quand $|\lambda| \to +\infty$, donc $|J|$ n'est pas bornée.

   Pour montrer que J n'admet pas de minimum, resp. maximum, global, il faut montrer que J n'est ni bornée supérieurement, ni inferieurement !
   L'exemple $J(\lambda v)$ montre que J n'est pas bornée supérieurement.
   Si l'on prend $w = (1,-1,1,-1,1,-1)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

   $J(\lambda w) = -3\lambda^2 - \lambda\left(\sum_{i=1}^{6}(-1)^{i-1}\alpha_i\right) \to -\infty$ quand $|\lambda| \to +\infty$,

   Note : d'autres exemples de vecteurs sont possibles, p.ex. $(\lambda, 1, 0, 0, 0, 0)\cdots$

3. On trouve facilement le vecteur gradient de J : $\nabla J(x) = \begin{pmatrix} x_2-\alpha_1 \\ x_1-\alpha_2 \\ x_4-\alpha_3 \\ x_3-\alpha_4 \\ x_6-\alpha_5 \\ x_5-\alpha_6 \end{pmatrix}$

   et la matrice hessienne $H_f(x) = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$ qui est indépendante de x.

   L'unique point critique de J est $x^* = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_4 \\ \alpha_3 \\ \alpha_6 \\ \alpha_5 \end{pmatrix}$

   Par ailleurs, on constate que $H_f(x) = 2\,B$ et on obtient la forme quadratique définie par $H_f(x)$, pour $y \in \mathbb{R}^6$ par $r(y) = y^t\, H_f(x)\, y = 2\,q(y)$.
   On a vu en 1. que q s'écrit comme somme de 6 carrés dont trois ont le signe '+' et trois le signe '-'. On peut en conclure que x^* est un point selle et J n'a pas d'extrémum local.
   Note : Si l'on veut calculer les valeurs propres de $H_f(x)$ il faut calculer

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2-1)^3\,,$$

   donc $+1$ et -1 sont les valeurs propres (triples).