Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 3e année, 2008–2009

OPTIMISATION

Corrigé de l'examen du 15 janvier 2009

Exercice 1

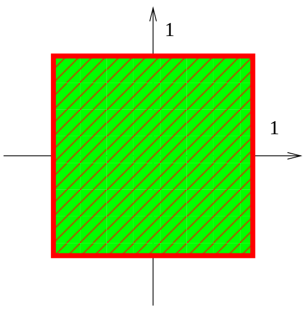
1. On a facilement $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1x_2 \\ 3x_1^2 - 3x_2^2 + 1 \end{pmatrix}$ et $H_f(x) = 6\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ x_1 & -x_2 \end{pmatrix}$.

2. Le système $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a comme solutions dans $\mathbb{R}^2$: $a = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ et $a' = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

3. Comme $H_f(a) = 6\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, la matrice hessienne admet $\pm 2\sqrt{3}$ comme valeurs propres et a est un point selle. De même pour a'.

   Dans les deux cas, les v.p. étant non nulles et de signes opposés, on déduit que f n'admet aucun extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

4. La boule unité pour la norme $\|.\|_\infty$, B, est le carré fermé $[-1, +1]^2$ dont les quatre segments du bord forment le "cercle" unité S (rouge) .



5. La fonction f étant continue sur le fermé, borné (*i.e.* compact) B, elle y atteint son maximum en au moins un point x^*.

6. Si $x^* \in B \setminus S$, alors la fonction f atteint un maximum local en un point x^* de l'ouvert $\Omega = B \setminus S$. Or, d'après 5, f n'admet aucun extremum local. D'où $x^* \in S$.

7. D'après 6, il suffit d'étudier f sur S, ce qui permet de se ramener à l'étude de fonctions d'une variable réelle.
   On peut remarquer de plus que $f(x_1, x_2) = f(-x_1, x_2) = -f(x_1, -x_2)$.
   Il suffit donc d'étudier f sur les deux intervalles $\{(1, x_2) \,/\, -1 \leq x_2 \leq 1\}$ et $\{(x_1, 1) \,/\, -1 \leq x_1 \leq 1\}$. On introduit les fonctions d'une variable réelle :

$$h(x_2) = f(1, x_2) = f(-1, x_2) = x_2(4 - x_2^2) \quad \text{et} \quad k(x_1) = f(x_1, 1) = -f(x_1, -1) = 3x_1^2$$

   pour $-1 \leq x_1, x_2 \leq 1$.
   En étudiant leurs variations, on vérifie facilement que $x^* = (1, 1)$ ou $(-1, 1)$ tandis que $m = 3$.

Exercice 2

1. Le gradient de g vaut $\nabla g(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 3x_2^2 \end{pmatrix}$. Le point $(0,0)$ est donc l'unique point critique.

   La matrice hessienne est $H_g(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6x_2 \end{pmatrix}$. Donc $H_g(0,0)$ est dégénérée et l'on ne peut pas conclure.

   Or $g(0,0) = 0$ tandis que $g(0,x_2) = x_2^3$ change de signe pour $x_2 \neq 0$ (petit).
   $(0,0)$ est donc un point selle et g n'admet pas d'extremum locaux sur $\mathbb{R}^2$.

   Remarque : La fonction $h(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^4$ a un point critique en $(0,0)$ et $H_h(0,0) = H_g(0,0)$. Or h est toujours positive et $(0,0)$ est un minimum (absolu) pour h.

2. Comme $\lim\limits_{x_2 \to \pm\infty} g(0,x_2) = \pm\infty$ le résultat est immédiat.

   Remarque : La fonction d'une variable réelle $x \mapsto \mathrm{Arctg}(x)$ n'admet pas d'extremum local et est bornée.