Université René Descartes – Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

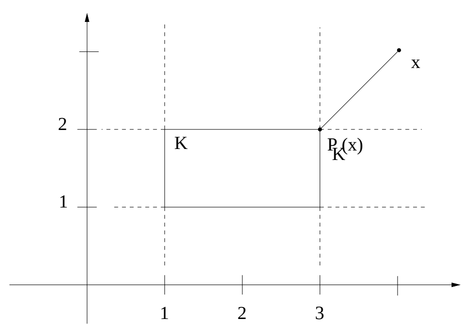
Licence 3e année, 2006-2007

OPTIMISATION

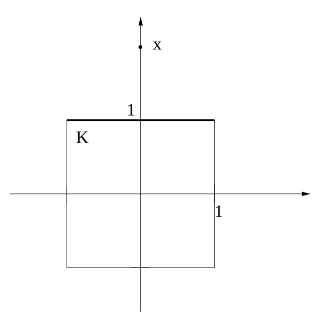
Correction du Partiel du 21/11/2006

Exercice 1.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^2$.
Comme K est un convexe fermé non vide et que $(\mathbb{R}^2, <.,.>)$ est un espace euclidien (donc de Hilbert), d'après le théorème de projection sur un convexe fermé, il existe un unique $y^* \in K$ tel que
$$\|x - y^*\|_2 = \min_{y \in K} \|x - y\|_2.$$
Le minimum sur $y \in K$ de $\|x - y\|_2^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$ est atteint par (attention, ce n'est pas la projection orthogonale ici !)
$$y_1^* = \begin{cases} \alpha & \text{si } x_1 \leq \alpha \\ x_1 & \text{si } \alpha \leq x_1 \leq \beta \\ \beta & \text{si } \beta \leq x_1 \end{cases} \quad , \quad y_2^* = \begin{cases} \delta & \text{si } x_2 \leq \delta \\ x_2 & \text{si } \delta \leq x_2 \leq \gamma \\ \beta & \text{si } \gamma \leq x_2. \end{cases}$$
Ainsi, pour $\alpha = \delta = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$ et $x = (4, 3)$, le minimum est atteint pour $P_K(x) = (\beta, \gamma) = (3, 2)$.



2. $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$ n'est pas un espace de Hilbert, donc le théorème de projection sur un convexe fermé ne s'applique pas. Pour K défini par $\alpha = \delta = -1$ et $\beta = \gamma = 1$ et $x = (0, 2)$, $\min_{y \in K} \|x - y\|_\infty$ a une infinité de solutions qui sont les points $\{(y_1, 1), -1 \leq y_1 \leq 1\}$.
En effet, $\|y - x\|_\infty = \max(|y_1|, |y_2 - 2|)$: $|y_2 - 2|$ est minimisé sur K par $y_2 = 1$ et comme $|y_1| \leq 1$, $\min_{y \in K} \|x - y\|_\infty = 1$. Ce minimum est atteint par tous les points d'ordonnée 1 et d'abscisse entre -1 et 1.



Exercice 2.

1. $\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad q(x) = b(x, x)$ avec $b(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.
b est une forme bilinéaire symétrique donc q est une forme quadratique.

$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad q(x) = (x_1 + \frac{1}{2}\, x_2)^2 + \frac{3}{4}\, x_2^2 + x_3^2$, q étant une somme de carrés, elle est positive.
De plus,

$$q(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}\, x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

donc q est définie.

2. Le produit scalaire associé est donné par $[x|y] = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$; la matrice associée Q dans la base canonique vérifie $[x|y] = {}^tXQY$, donc $Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On cherche $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad J(x) = [\alpha|x]$.

$$J(x) = [\alpha|x] \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \frac{1}{2}(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} = 1 \\ \alpha_2 + \frac{\alpha_1}{2} = 1 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{2}{3} \\ \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

4. J est une fonction continue sur S qui est un fermé borné de $\mathbb{R}^3$, donc J est bornée sur S et atteint ses bornes.

5. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad -q(\alpha)^{1/2} q(x)^{1/2} \leq [\alpha|x] \leq q(\alpha)^{1/2} q(x)^{1/2},$$

donc

$$\forall x \in S \quad -q(\alpha)^{1/2} \leq [\alpha|x] \leq q(\alpha)^{1/2}.$$

Les bornes de J sur S sont atteintes lorsqu'on a l'égalité dans Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire pour $x^* = \lambda\alpha$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Comme $x^* \in S$, on a $q(\lambda\alpha) = 1$, soit $\lambda^2 = \dfrac{1}{q(\alpha)}$.

Pour $x^*_+ = \dfrac{\alpha}{\sqrt{q(\alpha)}} = \sqrt{\dfrac{3}{7}} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $J(x^*_+) = \sqrt{q(\alpha)} = \sqrt{7/3}$.

Pour $x^*_- = -\dfrac{\alpha}{\sqrt{q(\alpha)}} = \sqrt{\dfrac{3}{7}} \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $J(x^*_-) = -\sqrt{q(\alpha)} = -\sqrt{7/3}$.