Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 3e année, 2007–2008

Corrigé du partiel d'Optimisation (13/11/07)

Problème.

I.

1) Il suffit de montrer que la forme bilinéaire $\langle ., . \rangle$ est définie positive, mais on présente toute la démonstration :

(a) $\langle P, Q\rangle = \langle Q, P\rangle$, $\forall P, Q \in \mathbf{R}_3[X]$, d'où la symétrie.

(b) Soient $P_1, P_2, Q \in \mathbf{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \lambda P_1 + P_2, Q\rangle &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \Big(\lambda P_1 + P_2\Big)(t) Q(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \Big(\lambda P_1(t) + P_2(t)\Big) Q(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \Big(\lambda P_1(t)Q(t) + P_2(t)Q(t)\Big)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \lambda P_1(t)Q(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P_2(t)Q(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \lambda\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P_1(t)Q(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P_2(t)Q(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \lambda\langle P_1, Q\rangle + \langle P_2, Q\rangle.
\end{aligned}$$

De plus, $\langle Q, \lambda P_1 + P_2\rangle = \langle \lambda P_1 + P_2, Q\rangle$ par symétrie, d'où $\langle P, Q\rangle$ est bilinéaire sur $\mathbf{R}_3[X]$.

(c) Soit $P \in \mathbf{R}_3[X]$, alors $P^2(t) \geq 0$, $\forall t \in [-1, 1]$ d'où $\langle P, P\rangle = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(t)\ \mathrm{d}t \geq 0$ et la forme $\langle ., .\rangle$ est positive.

(d) Soit $P \in \mathbf{R}_3[X]$ tel que $\langle P, P\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P^2(t)\ \mathrm{d}t \geq 0 = 0$ comme $t \to P^2(t)$ est continue et positive sur $[-1, 1]$, on a $P^2(t) = 0$, $\forall t \in [-1, 1]$ et donc $P(t) = 0$, $\forall t \in [-1, 1]$, donc P est un polynome admettant une infinité de racines, il est alors égal au polynome nul.
Donc $\langle ., .\rangle$ est définie positive.

2) La dimension de $\mathbf{R}_3[X]$ est 4. En effet, $\{X^0, X^1, X^2, X^3\}$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$ (c'est la base canonique).

3) Le polynome Q_0 est défini par la relation $\langle Q_0, Q_0\rangle = 1$, ce qui donne $a^2 = 1$ et on choisit, par exemple, pour la suite $Q_0(X) = a = 1$.
Le polynome Q_1 est défini par les relations $\langle Q_1, Q_1\rangle = 1$ et $\langle Q_1, Q_0\rangle = 0$, ce qui donne, par exemple, $Q_1(X) = \sqrt{3}X$.
Le polynome Q_2 est défini par les relations $\langle Q_2, Q_2\rangle = 1$, $\langle Q_2, Q_0\rangle = 0$ et $\langle Q_2, Q_1\rangle = 0$ et l'on peut prendre $Q_2(X) = -\frac{3\sqrt{5}}{2}X^2 + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

II.

1) Si u et v sont des vecteurs orthogonaux de E alors $\langle u, v\rangle = 0$. En utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire, on obtient :

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

2) a) Par définition de p on sait que pour tout vecteur u de E, $p(u)$ est un vecteur de F. Comme F est un sev de E, $v - p(u) \in F$ pour tout $v \in F$. Par définition de l'application p :

$$\langle u - p(u), v - p(u)\rangle = 0.$$

b) On applique l'égalité obtenue en (II)-1 aux vecteurs $u - p(u)$ et $p(u) - v$ qui sont orthogonaux, d'après (II)-2-a, et cela donne :

$$\begin{aligned} \|u - v\|^2 &= \|u - p(u) + p(u) - v\|^2 \\ &= \|u - p(u)\|^2 + \|p(u) - v\|^2 \\ &\geq \|u - p(u)\|^2. \end{aligned}$$

c) En utilisant l'inégalité obtenue en (II)-2-b, on déduit que $\inf_{v \in F} \|u - v\|^2 \geq \|u - p(u)\|^2$ et ainsi que $d^2 \geq \|u - p(u)\|^2$.
Par croissance de l'application $\sqrt{}$ sur $\mathbf{R}$, on obtient que $d \geq \|u - p(u)\|$. Or comme $p(u) \in F$, par définition de d on sait aussi que $d \leq \|u - p(u)\|$, d'où l'égalité.

III.

1) Les calculs donnent :

$$\begin{aligned} \langle X^3, Q_0 \rangle &= 0, \\ \langle X^3, Q_1 \rangle &= \frac{\sqrt{3}}{5}, \\ \langle X^3, Q_2 \rangle &= 0, \\ \\ \text{et } \ p(X^3) &= \langle X^3, Q_0 \rangle \, Q_0 + \langle X^3, Q_1 \rangle \, Q_1 + \langle X^3, Q_2 \rangle \, Q_2 = \frac{3}{5} X. \end{aligned}$$

2) et 3) Un nouveau calcul donne :

$$\|X^3 - p(X)\|^2 = \|X^3 - \frac{3}{5} X\|^2 = \frac{4}{175},$$

et donc,

$$\|X^3 - p(X)\| = \frac{2}{5\sqrt{7}}.$$