Université René Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 3e année, 2008–2009

Optimisation

Correction partielle du Partiel

Question de cours et exercice 1 voir cours et TD.

Exercice 2.

1) L'espace $E = \mathbb{R}_2[X]$ est un sev de l'ev $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Il est de dimension 3 et une base est $(1, X, X^2)$.

2) (a) On a $< P, Q >=< Q, P >$, $\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$.

(b) Soient $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
< \lambda P_1 + P_2, Q > &= \int_0^1 \Big(\lambda P_1 + P_2\Big)(x) Q(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \Big(\lambda P_1(x) + P_2(x)\Big) Q(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \Big(\lambda P_1(x)Q(x) + P_2(x)Q(x)\Big)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \lambda P_1(x)Q(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^1 P_2(x)Q(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \lambda \int_0^1 P_1(x)Q(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^1 P_2(x)Q(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \lambda < P_1, Q > + < P_2, Q > .
\end{aligned}$$

De plus, $< Q, \lambda P_1 + P_2 >=< \lambda P_1 + P_2, Q >$ par symétrie, d'où $< P, Q >$ est bilinéaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

(c) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $P^2(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, 1]$ d'où

$$< P, P >= \int_0^1 P^2(x)\ \mathrm{d}x \geq 0.$$

(d) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $< P, P >= \int_0^1 P^2(x)\ \mathrm{d}x \geq 0 = 0$ comme $x \to P^2(x)$ est continue et positive sur $[0, 1]$, on a $P^2(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$ et donc $P(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$, donc P est un polynôme admettant une infinité de racines, il est alors égal au polynôme nul.

3) On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux polynômes $P(x) = ax+b$ et $Q(x) = x$. Comme $< P, P >= \int_0^1 (ax + b)^2\ \mathrm{d}x = \int_0^1 (a^2x^2 + 2bx + c^2)\ \mathrm{d}x$ et $< Q, Q >= \int_0^1 x^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(< P, Q >)^2 &= \left(\int_0^1 (ax + b)x\ \mathrm{d}x\right)^2 \\
&\leq (< P, P >)(< Q, Q >) = \frac{1}{3}\left(\int_0^1 (a^2x^2 + 2abx + b^2)\ \mathrm{d}x\right).
\end{aligned}$$

4) L'espace $F = \mathbb{R}_1[X]$ est un sev de l'ev $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Il est de dimension 2. Construisons une base orthogonale. Cherchons les réels a, b et c tels que si $P(x) = a$ et $Q(x) = bx + c$ alors $< P, Q >= 0$. Un calcul donne :

$$\begin{aligned} < P, Q > &= \int_0^1 a(bx + c)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{ab}{2} + ac. \end{aligned}$$

Donc il faut que (a, b, c) satisfasse $\frac{ab}{2} + ac = 0$. On peut choisir $a = 1$, $b = 2$ et $c = -1$. La famille $(1, 2x - 1)$ est une base orthogonale de F.

5) Par propriété de la projection, on cherche la projection $p(P)$ de $P(x) = x^2$ sur F. Pour cela, on calcule $< x^2, 1 >$ et $< x^2, 2x-1 >$ et ensuite on obtient que $p(x^2) =< x^2, 1 > + < x^2, 2x-1 > (2x - 1)$. Or on voit que $< x^2, 1 >= \frac{1}{3}$ et que $< x^2, 2x - 1 >= \frac{1}{6}$, donc $p(x^2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(2x - 1)$. Ainsi on trouve que $a_0 = b_0 = \frac{1}{3}$.