Université René Descartes – Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 3e année, 2006–2007

OPTIMISATION

Examen du 16 janvier 2007

Durée 1h30. Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Il faut justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Problème :

Soient $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathcal{A}$. On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et l'on suppose que a est un extrémum local de f sur $\mathcal{A}$.
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $0 \in I$, on considère une courbe paramétrée $X : I \to \mathcal{A}$ vérifiant : $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{A})$ et $X(0) = a$.

1. Montrer que $\nabla f(a)$ est perpendiculaire au vecteur tangent $X'(0)$.

Soit Q une matrice d'ordre n, symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$, on définit la fonction quadratique f, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, par $f(x) = \frac{1}{2} x^t \, Q \, x + b^t \, x + c$.

2. Montrer que $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$.
3. Montrer que f admet au moins un minimum sur $\mathbb{R}^n$.

Pour la suite on fixe $n = 2$, $c = 0$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
et l'on considère le cercle $\mathcal{A} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

4. Écrire les équations vérifiées par un extrémum local $a \in \mathcal{A}$ de f sur $\mathcal{A}$.
5. Montrer que f admet au moins un minimum sur le cercle $\mathcal{A}$.
   Déterminer la valeur et les coordonnées des minimas.

Exercice

Déterminer les extrema locaux de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \, .$$