Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

PARIS DESCARTES

Licence 3e année, 2007–2008

Optimisation

Examen du 15 janvier 2008

Durée 1h30. Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Il faut justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Questions de cours :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $a \in \Omega$

1. Écrire la formule de Taylor, à l'ordre 2, pour f au voisinage de a.
2. On suppose que $\nabla f(a) = 0$ et que la matrice hessienne $H_f(a)$ est définie positive, montrer que a est un minimum local strict de f.

Exercice 1

On définit la fonction f par $f(x, y) = -\Big(\log(x) + \log(y) + \log(1-x) + \log(1-y)\Big)$ pour $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, Ω étant le domaine de f

1. Déterminer et représenter Ω.
2. Calculer $\nabla f(x, y)$ et $H_f(x, y)$.
3. Que peut-on dire de $H_f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \Omega$?
4. En déduire que f admet un minimum local strict $a \in \Omega$ en le déterminant.
5. On définit la fonction g sur Ω par $g(x, y) = e^{-f(x,y)}$.
   Justifier l'existence du réel $\alpha = \max\limits_{(x,y)\in\Omega} g(x, y)$ et déterminer sa valeur.

Exercice 2

Soit $q : \mathbb{R}^6 \mapsto \mathbb{R}$ l'application définie , pour $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ par

$$q(x) = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6$$

1. Montrer que q est une forme quadratique ; expliciter la forme bilinéaire symétrique b associée ; q est elle positive ? non dégénérée ?
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^6$; on pose $J(x) = q(x) - < \alpha, x >$; montrer que $|J|$ n'est pas bornée ; en déduire que J n'admet pas d'extremum global.
3. Calculer le gradient ∇J et la matrice hessienne H_J ; montrer que J admet un point critique que l'on calculera, mais n'admet pas d'extremum local.