Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 3e année, 2008–2009

Optimisation

Examen du 15 janvier 2009

Durée 1h30. Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Il faut justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Questions de cours :

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^n$ fixé et $v \in \mathbb{R}^n$ avec $\|v\|_2 = 1$ quelconque.

1. Donner la définition de la dérivée directionnelle $D_v f(a)$ et du gradient $\nabla f(a)$.
2. Démontrer que $D_v f(a)$ se calcule grâce à $\nabla f(a)$, pour tout v.
3. Déduire que $|D_v f(a)| \leq \|\nabla f(a)\|$. Pour quels v a-t-on égalité ?

Exercice 1

On définit la fonction f pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1, x_2) = x_2(3x_1^2 - x_2^2 + 1) .$$

1. Calculer le gradient $\nabla f(x)$ et la matrice hessienne $H_f(x)$ de f au point $x = (x_1, x_2)$.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Montrer que f n'admet aucun extremum local sur $\mathbb{R}^2$.
4. On note $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$, $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|x\|_\infty \leq 1\}$ et $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|x\|_\infty = 1\}$. Tracer B et S.
5. Montrer que la restriction de f à B atteint un maximum en au moins un point $x^* \in B$.
6. Montrer que $x^* \in S$.
7. Calculer x^* et $m^* = \max\limits_{x \in B} f(x)$.

Exercice 2

On définit la fonction g pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3 .$$

1. Étudier les extremums locaux de g sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que g n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^2$.