Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 3^e^ année, 2009–2010

Optimisation

Examen du 13 janvier 2010

Durée 1h30. Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Il faut justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Questions de cours :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $a \in \Omega$.

1. Écrire la formule de Taylor, à l'ordre 2, pour f au voisinage de a.
2. On suppose que $\nabla f(a) = 0$ et que la matrice hessienne $H_f(a)$ est définie positive, montrer que a est un minimum local strict de f.

Exercice 1. Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on pose $q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2$.

1. Montrer que q est une forme quadratique, pour cela expliciter la forme bilinéaire b telle que $b(x, x) = q(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^3$.
   Déterminer la matrice Φ de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Sans calculer les valeurs propres de Φ, montrer que q n'est ni définie positive, ni définie négative.
2. Déterminer les valeurs propres de Φ et trouver une base de vecteurs propres orthonormée pour le produit scalaire euclidien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que q n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^3$.
4. Justifier l'existence d'extrema de q sur la sphère euclidienne $S = \{x \in \mathbb{R}^3 ; \|x\|^2 = 1\}$ et les déterminer.

Exercice 2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$.

1. Rechercher les points critiques de f et déterminer leur nature (maximum, minimum, ...).
2. Montrer que f admet un minimum global.

Exercice 3. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on pose $g(x, y) = -\ln x - \ln y$.

Note : Pour cet exercice on fera un seul graphe propre. Pour cela, utiliser un repère orthonormée dont l'unité correspond au moins à 3cm !

1. Montrer que g n'admet pas d'extremums sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
2. On note $L_g(c) = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 / g(x, y) = c\}$ une ligne de niveau de g. Tracer $L_g(0)$.
   Tracer la ligne de niveau passant par le point $(x, y) = (2, 2)$
   et celle passant par $(x, y) = (1/3, 1/3)$.
3. Calculer le vecteur $d(x, y) = -\dfrac{1}{2\|\nabla g(x, y)\|} \nabla g(x, y)$.

   Tracer $d(x, y)$ aux points $(x, y) = (1, 1)$, $(2, 2)$ et $(1/3, 1/3)$.
4. On pose $D = \{(x, y)/x > 0, y > 0, 2x - 2 \leq y \leq \frac{1}{2}x + 1\}$. Reporter D sur le graphique.
5. Montrer que g admet un minimum sur D. Déterminer ce point et la valeur minimale de g sur D. Justifier de façon précise.
6. Est-ce que g admet un maximum sur D ?