Université René Descartes – Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 3e année, 2006–2007

Optimisation

Contrôle continu du 21 novembre 2006

Durée 1h30. Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Il faut justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Questions de cours : Soit $(E, < .,. >)$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. On note $S = (< e_i, e_j >)_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice, dans $\mathcal{B}$, associée au produit scalaire $< .,. >$, on admet que S est inversible.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $U = Mat_{\mathcal{B}} u$ et $U^* = Mat_{\mathcal{B}} u^*$,

1. Exprimez U^* en fonction de U.
2. Donnez U^* quand u est un endomorphisme orthogonal.

Exercice 1. Soit $K = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / \alpha \leq y_1 \leq \beta$ et $\delta \leq y_2 \leq \gamma\}$, avec $\alpha < \beta$ $\delta < \gamma$ des réels.
On fixe $x = (x_1, x_2)$ élément quelconque de $\mathbb{R}^2$.

1. Que pouvez vous dire du nombre de solutions de $\min\limits_{y \in K} \|x - y\|_2$?
   Construire $y^* = P_K(x)$ vérifiant $\|x - P_K(x)\|_2 = \min\limits_{y \in K} \|x - y\|_2$ (exprimer y^* en fonction de $x = (x_1, x_2)$).
   Faire un schéma pour $\alpha = \delta = 1$, $\beta = 3$ et $\gamma = 2$, $x = (4, 3)$.
2. Que pouvez vous dire du nombre de solutions de $\min\limits_{y \in K} \|x - y\|_\infty$ dans le cas $\alpha = \delta = -1$, $\beta = \gamma = +1$, $x = (0, 2)$?

Exercice 2. Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on pose $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2$, $J(x) = x_1 + x_2 + x_3$, et l'on considère l'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, q(x) = 1\}$.

1. Montrer que q est une forme quadratique définie positive.
2. Déterminer le produit scalaire $[.|.]$ associé et écrire la matrice associée dans la base canonique.
3. Déterminer $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $J(x) = [\alpha | x]$.
4. Est-ce que J atteint son maximum, resp. minimum, sur S ? Justifiez.
5. Déterminer $\min\limits_{x \in S} J(x)$ et $\max\limits_{x \in S} J(x)$ et les points où les extremums sont atteints.