Université René Descartes – Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

PARIS DESCARTES

Licence 3e année, 2007–2008

Optimisation

Contrôle continu du 13 novembre 2007

Durée 1h30. Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Il faut justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Questions de cours : Soit $(E, <.,.>)$ un espace euclidien, on note $\|.\|$ la norme associée.

1. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Dans quel cas a-t-on égalité ? (le démontrer !)

Problème *(Note : les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante)*

(I) Sur l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ (espace des polynomes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3), on considère la forme bilinéaire définie par :

$$\langle P, Q\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\langle P, Q\rangle$ définit un produit scalaire.
2. Donner la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer des réels a, b, c, d, e, f tels que $Q_0(X) = a$, $Q_1(X) = bX + c$ et $Q_2(X) = dX^2 + eX + f$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ (le sous-espace des polynomes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2) muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle$ précédemment défini.

(II) Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et soit $\|.\|$ la nome associée au produit scalaire (i.e. $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$).

1. Soient u et v deux vecteurs orthogonaux de E, montrer que $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E, on note p l'application linéaire de E sur F définie de la manière suivante :

$$\forall u \in E\ :\ p(u) \in F \text{ et vérifie } \forall v \in F,\ \langle u - p(u), v\rangle = 0.$$

a) Vérifier que pour tout u dans E et tout v dans F, $u - p(u)$ et $v - p(u)$ sont orthogonaux.

b) En utilisant (II)-1 montrer que pour tout u dans E et tout v dans F,

$$\|u - v\|^2 \geq \|u - p(u)\|^2.$$

c) Soit $u \in E$, on appelle distance de u à F le nombre $\text{dist}\ (u, F) = \inf_{v\in F} \|u - v\|$.

Montrer que $\text{dist}\ (u, F) = \|u - p(u)\|$.

(III) Dans cette partie, nous allons appliquer ce qui précède au cas où E est l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle,\rangle$ défini au (I) et F est le sous-espace $\mathbb{R}_2[X]$. On définit p comme dans (II) et on rappelle que si (Q_0, Q_1, Q_2) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ alors $p(Q) = \sum_{i=0}^{2} \langle Q, Q_i\rangle\, Q_i$.

1. Calculer $\langle X^3, Q_0\rangle$, $\langle X^3, Q_1\rangle$ et $\langle X^3, Q_2\rangle$, où $Q_0(X) = 1$, $Q_1(X) = \sqrt{3}X$ et $Q_2(X) = -\frac{3\sqrt{5}}{2}X^2 + \frac{\sqrt{5}}{2}$. En déduire l'expression de $p(X^3)$.
2. Calculer $\|X^3 - p(X^3)\|^2$.
3. En déduire que

$$\text{dist}\ (X^3, F) = \frac{2}{5\sqrt{7}}.$$