Université René Descartes – Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 3$^{\text{e}}$ année, 2008–2009

Optimisation

Partiel du 18 novembre 2008

Durée 1h30. Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Il faut justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Questions de cours : Soit $(E, <.,.>)$ un espace euclidien, on note $\|.\|$ la norme associée.

1. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Dans quel cas a-t-on égalité ? (le démontrer !)

Exercice 1. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

1) Montrer que $(A, B) \to < A, B >= \text{Trace } ({}^tAB)$ est un produit scalaire sur E.
On note N la norme associée ($N(A)^2 = \text{Trace } ({}^tAA)$).

2) Soient A et B dans E. Montrer que $N(AB)^2 \leq N(A)^2 N(B)^2$, puis que $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

3) a) Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in E$. Calculer $|\text{Trace } A|^2$ et $N(A)^2$ en fonction des coefficients $a_{i,j}$.

b) Montrer que $|\text{Trace } A|^2 \leq nN(A)^2$.

c) Montrer que $|\text{Trace } A|^2 = nN(A)^2$ si, et seulement si, A est proportionnelle à la matrice identité I_n.

Exercice 2. Soit E, l'espace des polynômes réels de degré 2 à coefficients réels.

1) Justifier que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, en donner une base et la dimension.

2) On munit E de la forme suivante :

$$< P, Q >= \int_0^1 P(x)Q(x)\, dx.$$

Justifier que $<.,.>$ est un produit scalaire sur E. Donner la norme $\|P\|$ associée.

3) Justifier que pour tous réels a et b,

$$\left(\int_0^1 (ax^2 + bx)\, dx\right)^2 \leq \frac{1}{3}\left(\int_0^1 (a^2x^2 + 2abx + b^2)\, dx\right).$$

4) Soit $F \subset E$, l'espace des polynômes de degré 1. Justifier que F est un s.e.v. de E, en donner la dimension. Donner une base orthogonale de F.

On note p la projection orthogonale de E sur F. On rappelle que p est l'application linéaire définie de la manière suivante :

$$\forall P \in E,\ p(P) \in F \text{ et } \forall (P,Q) \in E \times F,\ \langle P - p(P), Q\rangle = 0.$$

En outre on rappelle que pour tout P dans E et tout Q dans F, $P - p(Q)$ et $Q - p(P)$ sont orthogonaux et que pour tout P dans E et tout Q dans F,

$$\|P - Q\|^2 \geq \|P - p(P)\|^2.$$

Soit $P \in E$, on appelle distance de P à F le nombre

$$\text{dist } (P, F) = \inf_{Q \in F} \|P - Q\|.$$

On admet que

$$\text{dist } (P, F) = \|P - p(P)\|.$$

5) Déterminer les réels a_0 et b_0 tels que :

$$I(a_0, b_0) = \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (a + b(x - 1/2) - x^2)^2\, dx,$$

et calculer $I(a_0, b_0)$.