Université René Descartes – Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 3e année, 2008–2009

Optimisation

Partiel du 24 novembre 2009

Durée 1h30. Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Il faut justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Questions de cours : Soit $(E, < ., . >)$ un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1. Donner la propriété qui caractérise l'endomorphisme adjoint u^*.
2. Pour u, $v \in \mathcal{L}(E)$, démontrer $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

Exercice 1. Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + px_2^2$, $p \in \mathbb{R}$, $J(x) = x_1 + x_2$ et l'on considère l'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, q(x) = 1\}$.
On se propose de déterminer $\min_{x \in S} J(x)$ et $\max_{x \in S} J(x)$.

1. Montrer que q est une forme quadratique, pour cela expliciter la forme bilinéaire b telle que $b(x, x) = q(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^2$.
   Déterminer la matrice Φ de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   Sans calculer les valeurs propres de Φ, montrer que q est définie positive si et seulement si $p > 1$.

Pour la suite, on suppose que $p = 2$ et donc q est une forme quadratique définie positive.

2. Déterminer le produit scalaire $[.|.]$ associé à q.
3. Déterminer $\beta \in \mathbb{R}^2$ tel que $J(x) = [x, \beta]$, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.
4. Grâce à ce qui précède minimiser/maximiser J sur S.

Exercice 2. Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. Pour deux polynômes p et q, on définit $\langle p, q\rangle$ par :

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt + \int_{-1}^{1} p'(t)q'(t)\,dt\,.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E. Quelle est la norme associée, notée $\|\cdot\|$?
2. Montrer que les polynômes pairs sont orthogonaux aux polynômes impairs.
3. Soit $F \subset E$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E.
   Donner sa dimension ainsi qu'une base orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
4. Soit (p_0, p_1) une base orthonormée de F. On pose $q(t) = t^2 \in E$.
   Montrer que $P_F(q)$, la projection orthogonale de q sur F est donnée par
   $$P_F(q) = \langle q, p_0\rangle p_0 + \langle q, p_1\rangle p_1.$$
5. Calculer $\|q\|^2$ et $\|P_F(q)\|^2$ et en déduire $\|q - P_F(q)\|^2$.
6. Déterminer des réels a_0 et b_0 tels que
   $$I(a_0, b_0) = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left(\int_{-1}^{1} \left(t^2 - at - b\right)^2 dt + \int_{-1}^{1} (2t - a)^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}},$$
   et vérifier que $I(a_0, b_0) = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$.