Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

MASTER 1 MM - IM 2014–2015

Optimisation Algorithmique

Polycopié et notes autorisés. Durée 1h15.

Fichiers disponibles :

1. Cours, fiches de TD/TP et corrigé des TP dans le répertoire COURS_TP ;
2. dans le répertoire SCILAB le polycopié Scilab ;
3. les fichiers CC_Ex1.sci, CC_Ex1.sce, CC_Ex2.sci et CC_Ex2.sce sont à compléter et contiennent déjà une partie de code à utiliser !

À remettre :

1. les fichier `CC_Ex1.sce`, `CC_Ex1.sce`, `CC_Ex2.sci` et `CC_Ex2.sce` des fonctions respectivement des commandes Scilab avec votre nom en commentaire ;
2. la copie double sur laquelle vous pouvez expliquer ce que vous avez fait : calculs, formules, graphiques, problèmes rencontrés,...

Exercice I

On s'intéresse à la minimisation de la fonctionnelle coût $f(x) = \sum_{k=1}^{p} e^{<a^k,x>+b_k}$,

où $x \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1 \cdots b_p)^t \in \mathcal{M}(p,1)$ et on note A la matrice formé à partir des vecteurs $a^k \in \mathbb{R}^n$: $A = (a^1\, a^2\, \cdots\, a^p)^t \in \mathcal{M}(p,n)$.

On veut comparer les performances de la méthode de descente de gradient et de la méthode de Newton sur les données en grandes dimensions, par exemple $n \in \{10, \ldots, 400\}$, $p = n + 100$.

1. Utilisez les fichiers vus en TP afin de compléter `CC_Ex1.sce` et `CC_Ex1.sce` pour comparer la vitesse de convergence des deux méthodes.
   On pourra utiliser les commandes `tic()` et `toc()` pour mesurer le temps de calcul pour différentes valeurs de n (*cf.* fichier `CC_Ex1.sce`).
2. Illustrez la précision du résultat en fonction du nombre d'itérations pour les deux méthodes pour $n = 200$ et $p = 350$.
3. Commentez la construction des données proposée (A et b) ainsi que le choix de $x^{(o)}$ (*cf.* fichier `CC_Ex1.sce`).

Exercice II

On s'intéresse aux performances des quatre algorithmes : méthodes de descente du gradient, de Newton et du gradient conjugué (Fletcher-Reeves et Polack-Ribière) sur la fonction test de Rosenbrock définie sur $\mathbb{R}^2$:

$$g(x,y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2 .$$

1. Calculer $\nabla g(x,y)$ et $H_g(x,y)$. Déterminer le minimum de g, `x_min` et `v_min=g(x_min)`.
2. Écrire, dans `CC_Ex2.sci`, les fonctions `objectif(x)`, `gradient_obj(x)` et `hess_obj(x)` pour la fonction g.
3. Comparer les performances et le comportement des quatre méthodes en affichant des lignes de niveau et le trajet de la suite des points minimisants.
4. Tracer la précision du résultat en fonction du nombre d'itérations pour les quatre méthodes.
   On utilisera les valeurs initiales $x^{(0)}$: `[-1.2 ; 1]`, `[ 1 ; 3]` et `[2; -2]`.
   Commentez les résultats obtenus en vue des théorèmes du cours.