Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

MASTER I IM/MA 2014–2015

Optimisation et Algorithmique

EXAMEN, durée 2h

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.
Nombre de pages de l'énoncé : 2
Il faut justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Exercice 1

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par : $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{x_i}$, où $a_i \in \mathbb{R}$ pour $1 \le i \le n$.

1. Écrire une fonction Scilab `[v] = objectif(x,a)` qui calcule la valeur de f au point x et où $x = [x_1 \cdots x_n]^t$ et $a = [a_1 \cdots a_n]^t$ sont des vecteurs colonnes dans Scilab.

2. Calculer $\nabla f(x)$ et écrire une fonction Scilab `[v] = grad_objectif(x,a)` qui calcule $\nabla f(x)$.

3. Calculer $H_f(x)$ et écrire une fonction Scilab `[v] = hess_objectif(x,a)` qui calcule $H_f(x)$.

   Note : on tachera de ne pas utiliser de boucle pour les fonctions Scilab !

4. Que peut-on dire du problème $x^* = \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\arg\min} f(x)$?

Exercice 2

On considère la fonction quadratique, définie sur $\mathbb{R}^n$ par : $f(x) = \frac{1}{2} x^t\, Ax + b^t\, x$,
où A est une matrice réelle, symétrique définie positive de taille (n, n) et $b \in \mathbb{R}^n$.
On construit la suite $(x^{(\mathrm{k})})$ de $\mathbb{R}^n$ par $x^{(\mathrm{k+1})} = x^{(\mathrm{k})} + d_k$,
où $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ est quelconque donné et le vecteur $d_k \in \mathbb{R}^n$ est défini par $d_k = -H_k \nabla f(x^{(\mathrm{k})})$.
La suite de matrices H_k est définie par récurrence : H_0 symétrique quelconque donnée et

$$H_{k+1} = H_k + \frac{(d_k - H_k y_k)(d_k - H_k y_k)^t}{(d_k - H_k y_k)^t\, y_k}$$

où $y_k = \nabla f(x^{(\mathrm{k+1})}) - \nabla f(x^{(\mathrm{k})})$.
On suppose pour toute la suite que $(d_k - H_k y_k)^t\, y_k \neq 0$, pour tout k,

1. Déterminer $x^* = \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\arg\min} f(x)$.

2. Vérifier que que H_k est symétrique, pour tout k.

3. Vérifier que $y_k = Ad_k$, pour tout k.

4. Montrer par récurrence que pour tout $k \ge 1$ on a :
$$H_k y_j = d_j, \text{ pour } j = 0, \ldots, k-1\,.$$

5. Déduire de ce qui précède que si $\{d_0, \ldots, d_{n-1}\}$ est une famille libre, alors $H_n = A^{-1}$ et $x^{(\mathrm{n+1})} = x^*$.

Exercice 3
Les parties de cet exercice sont indépendantes mais illustrent toutes les deux des applications de la décomposition en valeurs singulières d'une matrice :
Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(m,n)$ avec $m \geq n$, on a la SVD de $A = U\Sigma V^t$
où $U \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(m,n)$, $\Sigma, V \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n)$, avec $U^t U = V^t V = I_n$ et Σ la matrice diagonale contenant les valeurs singulières $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$.

A) On désire résoudre le problème de minimisation avec contrainte suivant :

$$x^* = \underset{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1}{\arg\min} \|Ax\|_2 \, .$$

1. En utilisant la SVD de A, montrer que le problème peut s'écrire, après un changement de variable que l'on indiquera, comme suit :

$$y^* = \underset{y \in \mathbb{R}^n, \|y\|_2 = 1}{\arg\min} \|\Sigma y\|_2 \, .$$

2. En explicitant $\|\Sigma y\|_2$, déduire que $y^* = e_n$ (n-ième vecteur de la base canonique).

3. En déduire une expression simple pour x^*, donner aussi la valeur de $\|Ax^*\|_2$.

B) Pour $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n)$, on note $tr(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{ii}$ la trace de M et l'on admet que la norme de Frobenius, définie par $\|M\|_F^2 = tr(M^t M)$, est une norme matricielle.

1. Soient $M, N \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n)$. Justifier, brièvement, que $tr(M^t) = tr(M)$ et $tr(MN) = tr(NM)$.

2. Soit $Q \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n)$, avec $Q^t Q = I_n$. Justifier, brièvement, que $|Q_{ii}| \leq 1$, pour tout $1 \leq i \leq n$.

   On considère deux matrices carrés $A, B \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n)$ et on s'intéresse au problème

$$Q^* = \arg\min \Big\{ \|A - BQ\|_F \, / \, Q \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n) \text{ et } Q^t Q = I_n \Big\}.$$

3. Montrer que ce problème se ramène à <u>maximiser</u> la quantité $tr(Q^t B^t A)$, sous la contrainte $Q^t Q = I_n$.

4. En utilisant la décomposition SVD de $B^t A = \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^t$, montrer que l'on se ramène finalement à résoudre

$$Z^* = \arg\max \Big\{ tr(Z\tilde{\Sigma}) \, / \, Z \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n) \text{ et } Z^t \, Z = I_n \Big\}$$

5. Résoudre ce problème et en déduire Q^*.