

MASTER 1 MA-IM 2013–2014

OPTIMISATION ALGORITHMIQUE

*Polycopié et notes autorisés. Durée 1h30.*

**Fichiers disponibles :**

1. Cours, fiches de TD/TP et corrigé des TP dans le répertoire COURS\_TP ;
2. dans le répertoire SCILAB le memo Linux et le polycopié Scilab ;
3. les fichiers CC.sci et CC.sce à compléter et qui contiennent une partie de code à utiliser.

**À remettre :**

1. les fichiers CC.sce et CC.sci des fonctions respectivement des commandes Scilab avec  votre nom en commentaire  ;
2. la copie double sur laquelle vous pouvez expliquer ce que vous avez fait : calculs, formules, graphiques, problèmes rencontrés,...

**Exercice I**

Pour  $n, m \in \mathbb{N}^*$ , on définit la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$  par  $f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$

où  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$  matrice réelle et  $b = (b_1 \cdots b_m)^t \in \mathbb{R}^m$ .

1. Calculer  $\nabla f(x)$  et  $H_f(x)$ .
2. On considère le problème  $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$  (\*).  
Comment s'appelle ce problème ? Peut-on toujours résoudre ce problème ?  
Exprimer la solution grâce à la matrice pseudo-inverse. Justifiez brièvement.
3. Dans le fichier CC.sci, écrire la fonction Scilab `[x]=exerciceI(A,b)` qui donne le/un résultat de (\*).
4. Dans le fichier CC.sce, écrire des lignes de commande qui testent la fonction `exerciceI()`.

**Exercice II**

On s'intéresse à la minimisation de la fonctionnelle coût :  $f(x) = - \sum_{i=1}^m \log(b_i - \langle a_i, x \rangle)$

où :  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $a_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_i \in \mathbb{R}$  et  $\langle x, a_i \rangle = \sum_{j=1}^n x_j (a_i)_j$ .

On note  $b = (b_1 \cdots b_m)^t \in \mathbb{R}^m$  et  $A = (a_1^t \cdots a_m^t)$ , matrice réelle  $(m, n)$ , dont la  $i^e$ -ligne contient les coordonnées du vecteur  $a_i$ .

1. Vérifier dans le fichier CC.sci, que les fonctions `objectif()`, `gradient_obj()` sont correctes, corriger les si nécessaire.
2. Compléter les lignes d'exécution dans le fichier CC.sce afin de pouvoir tester et comparer les différentes méthodes implémentées dans les fonctions du fichier CC.sci sur l'exemple numérique proposé : lignes de niveaux, parcours de la suite  $(x^{(k)})_k$ , précision du résultat, ...  
Commentez les résultats.