Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

MASTER MISV 2009–2010

Optimisation Algorithmique :

Méthode « Dogleg »

Dans un TP précédent, on a étudié

$$x^*(\Delta) = \underset{x, \|x\|_2 < \Delta}{\arg\min} f(x) \quad \text{où} \;\; f(x) = c + g^t\, x + \frac{1}{2} x^t\, B\, x\ ,$$

avec $\Delta > 0$, $c \in \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{R}^n$ et B une matrice réelle, symétrique de taille (n, n).

Une méthode approximative de résolution de ce problème de minimisation sous contrainte est connue sous le nom de *méthode « Dogleg »*.
L'idée est d'approximer la courbe $\{x^*(\Delta), \Delta > 0\}$ grâce à une trajectoire composée par des segments.

Pour B définie positive, on définit $x(\alpha) = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha\, x^g & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ x^g + (\alpha - 1)(x^B - x^g) & 1 \leq \alpha \leq 2 \end{array} \right.$

où $x^g = -\dfrac{g^t\, g}{g^t\, B\, g}\, g$ est le minimum sans contraintes dans la direction $-g$

et $x^B = -B^{-1} g$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\alpha \mapsto \|x(\alpha)\|$ est croissante et $\alpha \mapsto f(x(\alpha))$ est décroissante quand B est définie positive.

2. Proposer un algorithme qui permet de trouver $x(\alpha^*) = \underset{x, \|x\|_2 < \Delta}{\arg\min} f(x(\alpha))$ pour B définie positive.

3. Que peut-on dire de $\underset{x, \|x\|_2 < \Delta}{\arg\min} f(x)$ quand B n'est pas définie positive ?

4. Faites une implémentation en `Scilab` qui permet de traiter tous les cas de figure.
   Illustrez par des exemples simples d'exécution des différents cas possibles ($n = 2$, $c = 0$).