Université René Descartes – Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

MASTER MISV 2005–2006

Optimisation et Algorithmique

EXAMEN, durée 1h30

Polycopié de cours et notes de cours autorisées, téléphones portables interdits.
Nombre de pages de l'énoncé : 1

Exercice I. (Méthode de Newton)

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et on utilise un modèle quadratique de f :

$$\tilde{f}(d) = f(x) + \nabla f(x)^t\, d + \frac{1}{2}\, d^t\, \nabla^2 f(x)\, d\,.$$

On note $p_N(f,x) = \nabla^2 f(x)^{-1}\, \nabla f(x)$ le pas de Newton de $f$en x et on pose

$$\lambda(x) = \left(\nabla f(x)^t\, \nabla^2 f(x)^{-1}\, \nabla f(x)\right)^{1/2}$$

1. Exprimer $f(x) - \inf\limits_{y} \tilde{f}(y)$ en fonction de $\lambda(x)$.

2. Utiliser la question précédente pour obtenir un test d'arrêt de l'algorithme de Newton.

Exercice II.

Soit A une matrice réelle (n,n), on se propose de déterminer un changement d'échelle des coordonnées $x_{nouv} = D x_{anc}$, où D est une matrice diagonale et $d_{ii} > 0$, tel que la matrice que l'on obtient dans le nouveau repère soit de norme de Frobenius minimale.

1. Montrer que l'on définit ainsi le problème d'optimisation suivant

$$\min \left\{ \left\|DAD^{-1}\right\|_F^2 \Big/ D = diag(d_{11}, \dots, d_{nn})\,, d_{ii} > 0 \right\}\,.$$

2. Montrer que grâce à un changement de variables on obtient un problème d'optimisation convexe sans contraintes :

$$\min_{\mathbb{R}^n} f(x)\,, \qquad \text{où}\ \ f(x) = \ln\left(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}^2\, e^{x_i - x_j}\right)\,.$$

3. On se propose d'appliquer l'algorithme de la plus forte descente en $\|.\|_1$ à ce problème. Montrer que l'on peut calculer facilement le pas de descente optimal en posant $\phi(\sigma) = f(x + \sigma\, e_k)$ et en résolvant $\phi'(\sigma) = 0$.

4. Écrire l'algorithme.