Université René Descartes – Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

MASTER MISV 2006–2007

Optimisation et Algorithmique

EXAMEN, durée 2h

Polycopié de cours et notes de cours autorisées, téléphones portables interdits.
Nombre de pages de l'énoncé : 2

PROBLÈME

Partie I

Soit A une matrice carrée d'ordre n, symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$.
On veut déterminer la solution x^* du système linéaire $Ax = b$ pour n grand.
On définit la fonction quadratique f, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, par $f(x) = \frac{1}{2} x^t A x - b^t x$.
Pour minimiser f sur $\mathbb{R}^n$, on propose l'algorithme de descente du gradient à pas constant suivant :

choisir $x^{(0)}$, *choisir* $\sigma > 0$ *et poser* $k = 0$
tant que $\|\nabla f(x^{(k)})\| > \varepsilon$
$d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$
$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \sigma\, d^{(k)}$
$k = k + 1$

1. Calculer $\nabla f(x)$ et $\nabla^2 f(x)$. Justifier brièvement pourquoi il est équivalent de résoudre le système $Ax = b$ et de minimiser f sur $\mathbb{R}^n$.
2. Écrire $x^{(\mathrm{k})}$ en fonction de $x^{(\mathrm{k-1})}$, A, b et σ ; en déduire une expression de $x^{(\mathrm{k})}$ en fonction de $x^{(0)}$, σb et de termes de la forme $(I - \sigma A)^i$, i entier.
3. Soient $0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A, déterminer $\widetilde{\lambda}_i$, les valeurs propres de $I - \sigma A$. Montrer que $\rho(I - \sigma A) \in]0, 1[$ si et seulement si $0 < \sigma < 2/\lambda_n$.
(Note : $\rho()$ désigne le rayon spectral d'une matrice)
4. Montrer que pour $0 < \sigma < 2/\lambda_n$ on a $\lim\limits_{k \to +\infty} (I - \sigma A)^k = O$ et $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} (I - \sigma A)^i = \frac{1}{\sigma} A^{-1}$.
(Indic. : étudier $\lim\limits_{k \to +\infty} \sum\limits_{i=0}^{k} B^k$, pour B matrice carré inversible et avec $\rho(B) < 1$)
5. Déduire que pour $0 < \sigma < 2/\lambda_n$, on a $\lim\limits_{k \to +\infty} x^{(\mathrm{k})} = x^*$ pour tout $x^{(0)}$.
6. Estimer, en fonction de n, le nombre d'opérations nécessaires pour une itération de l'algorithme précédent. Comparer à la résolution d'un système linéaire grâce à la méthode de Cholesky vue en cours.
7. Montrer que le pas de descente exact ${\sigma_e}^{(\mathrm{k})}$ en $x^{(\mathrm{k})}$ est donné par ${\sigma_e}^{(\mathrm{k})} = \dfrac{\|\nabla f(x^{(\mathrm{k})})\|^2}{\nabla f(x^{(\mathrm{k})})^t A \nabla f(x^{(\mathrm{k})})}$.
Est-ce que $0 < {\sigma_e}^{(\mathrm{k})} < 2/\lambda_n$?

Partie II

Soit A une matrice carrée d'ordre n, que l'on suppose maintenant uniquement inversible, mais l'on s'intéresse toujours à la solution x^* du système linéaire $Ax = b$.

1. Que peut-on dire de la solution du système $(A^t\, A)\, x = A^t\, b \quad (T)$?
2. Justifier, grâce aux propriétés de $A^t\, A$, que l'on peut appliquer l'algorithme de la partie I.
3. Écrire l'algorithme de descente du gradient à pas constant qui permet de résoudre (T). Optimisez le nombre d'opérations à effectuer pour chaque itération.
4. Estimer, en fonction de n, le nombre d'opérations nécessaires pour une itération de l'algorithme précédent. Comparer à la résolution d'un système linéaire grâce à la méthode de décomposition LU vue en cours.