Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

PARIS DESCARTES

MASTER MISV 2006–2007

Optimisation et Algorithmique

EXAMEN, durée 2h

Polycopié de cours et notes de cours autorisées, téléphones portables interdits.
Nombre de pages de l'énoncé : 2

Exercice 1

Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on définit $f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \gamma x_2^2)$, où $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ et l'on pose $x^{(0)} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\nabla f(x)$ et $\nabla^2 f(x)$. Dans quel cas la fonction f admet-elle un minimum unique sur $\mathbb{R}^2$. Quel est se minimum x^* ?
   On se placera dans toute la suite dans le cas d'un minimum unique.
2. On construit la suite $(x^{(\mathrm{k})})_{k\geq 0}$ de la façon suivante :
   $$(R) \left\{ \begin{array}{rcl} {x_1}^{(\mathrm{k+1})} & = & {x_1}^{(\mathrm{k})} - \sigma_k \, {x_1}^{(\mathrm{k})} \\ {x_2}^{(\mathrm{k+1})} & = & {x_2}^{(\mathrm{k})} - \sigma_k \, \gamma {x_2}^{(\mathrm{k})} \end{array} \right. .$$
   où σ_k vérifie $\nabla f\Big(x^{(\mathrm{k})} - \sigma_k \, \nabla f(x^{(\mathrm{k})})\Big)^t \, \nabla f(x^{(\mathrm{k})}) = 0\,.$
   Déterminer σ_k. Quel algorithme obtient-on par la récurrence (R) ?
3. Montrer que $x^{(\mathrm{k})} = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)^k \begin{pmatrix} \gamma \\ (-1)^k \end{pmatrix}$.
4. Que peut-on dire de $\nabla f(x^{(\mathrm{k})})$ et $\nabla f(x^{(\mathrm{k+1})})$? Conséquences sur la suite $(x^{(\mathrm{k})})_{k\geq 0}$?
5. Exprimer $\|x^* - x^{(\mathrm{k+1})}\|_2$ en fonction de $\|x^* - x^{(\mathrm{k})}\|_2$ Que peut-on dire sur la convergence de l'algorithme ? sur le nombre d'itérations nécessaires ?
6. Écrire l'algorithme de Newton appliqué à la fonction f. On note $\tilde{x}^{(\mathrm{k})}$ le point déterminé par l'algorithme à la k-ième itération, en partant de $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$.
7. Quand est-ce l'on peut appliquer l'algorithme de Newton pour cette fonction ?
8. Déterminer explicitement $\tilde{x}^{(\mathrm{k})}$ en fonction de k et γ.
   En combien d'itérations l'algorithme de Newton converge-t-il ?

Exercice 2

On considère la fonction `Scilab` suivante :

```
function [x]=toto(A,b,epsilon)
[U,S,V]=svd(A)
r=sum((diag(S)>epsilon).*1)
M=V(:,1:r)*S(1:r,1:r)^{-1}*U(:,1:r)'
x=M*b
endfunction
```

où `A` est une matrice (m, n), $m \geq n$, `b`$\in \mathbb{R}^m$ et `epsilon`$\in \mathbb{R}_+^*$.

1. Que représente `r` ?
2. Que représente la matrice `M` ?
3. Que est-ce que l'on calcule avec `toto(A,b,0.0)` ? avec `toto(A,b,0.00001)` ?
4. À quoi sert `epsilon` ? Expliquer l'intérêt de prendre `epsilon`> 0.

Exercice 3

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et convexe, *i.e.* pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n$: $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^t\,(y - x)$.
On considère un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ convexe.

1. Montrer l'équivalence des deux problèmes de minimisation sous contrainte suivants :

$$(P_1)\left\{\begin{array}{l} x^* \in \mathcal{A} \\ f(x^*) = \min\limits_{x \in \mathcal{A}} f(x) \end{array}\right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad (P_2)\left\{\begin{array}{l} x^* \in \mathcal{A} \\ \forall x \in \mathcal{A} : \nabla f(x^*)^t\,(x - x^*) \geq 0 \end{array}\right.$$

   (Indic. : $(P_1) \Rightarrow (P_2)$ par l'absurde, choisir $y \in \mathcal{A}$ avec $\nabla f(x^*)^t\,(y - x^*) < 0$ et considérer la fonction $\varphi(t) = f(ty + (1-t)x^*)$, $t \in [0, 1]$)

2. Donner une interprétation géométrique de la formulation (P_2).
3. Que devient (P_2) si $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$?

   Pour toute la suite : A est une matrice (m, n), $m < n$, de rang maximal m, $b \in \mathbb{R}^m$ et on pose $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ Ax = b\}$.

4. Pour $x, x^* \in \mathcal{A}$, vérifier qu'il existe $u \in \ker A$ tel que $x = x^* + u$.
   Que représente $\mathcal{A}$?
5. Soit $x^* \in \mathcal{A}$, montrer l'équivalence suivante

$$\Big[\forall x \in \mathcal{A} : \nabla f(x^*)^t\,(x - x^*) \geq 0\Big] \quad \Longleftrightarrow \quad \Big[\exists v^* \in \mathbb{R}^m : \nabla f(x^*) + A^t\,v^* = 0\Big]$$

   (Indic. : on rappelle que $(\ker A)^\perp = \mathrm{Im}(A^t)$)

6. En déduire une nouvelle formulation pour (P_2) .
7. Écrire une formulation équivalente à (P_1) pour $\mathcal{A}$ comme ci-dessus et $f(x) = \dfrac{1}{2} x^t\,Q\,x - x^t\,r$, où Q est une matrice (n, n) définie positive et $r \in \mathbb{R}^n$.