Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

MASTER 2008–2009

Optimisation et Algorithmique

EXAMEN, durée 2h

Polycopié de cours et notes de cours autorisées, téléphones portables interdits.
Nombre de pages de l'énoncé : 2
Il faut justifier les réponses.
Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Exercice 1

On veut minimiser sur $\mathbb{R}^n$ la fonction objectif f, supposée de classe $\mathcal{C}^2$, grâce à une méthode dite *quasi-Newton* : à la k-ième itération, f est approximée au voisinage de x_k par la fonction modèle quadratique

$$m_k(d) = f(x_k) + < \nabla f(x_k), d > + \frac{1}{2} d^t B_k\, d$$

où B_k est une matrice symétrique définie positive et $< .,. >$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$.
On passe à l'étape $k+1$ grâce à $x_{k+1} = x_k + \sigma_k\, d_k$,
où $d_k = \underset{d \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}}\, m_k(d) = -B_k^{-1} \nabla f(x_k) = -H_k \nabla f(x_k)$, avec $H_k = B_k^{-1}$
et σ_k vérifie les *conditions de Wolfe* :

$$f(x_k + \sigma d_k) \leq f(x_k) + c_1 \sigma < \nabla f(x_k), d_k > \tag{W1}$$

$$< \nabla f(x_k + \sigma d_k), d_k > \geq c_2 < \nabla f(x_k), d_k > \tag{W2}$$

avec $0 < c_1 < c_2 < 1$.

1. Vérifier que d_k est bien une direction de descente de f en x_k.

2. Pour $\sigma_k = 1$ et $B_k = \nabla^2 f(x_k)$, la matrice hessienne de f en x_k, on retrouve la méthode de Newton. Rappeler brièvement ses avantages et inconvénients.
Donner en particulier le nombre d'opérations nécessaires pour une itération de l'algorithme.

Dans la méthode quasi-Newton BFGS, on calcule H_{k+1} à partir de H_k grâce à

$$H_{k+1} = \left(I_n - \rho_k\, s_k y_k^t\right) H_k \left(I_n - \rho_k\, y_k s_k^t\right) + \rho_k\, s_k s_k^t\,,$$

où $s_k = x_{k+1} - x_k$, $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$ et $\rho_k = \dfrac{1}{y_k^t\, s_k}$.

3. Montrer que si σ_k vérifie les conditions de Wolfe, alors $y_k^t\, s_k > 0$.

4. Montrer que $H_{k+1}\, y_k = s_k$. En déduire $\nabla m_{k+1}(-\sigma_k\, d_k)$.
Que vaut $\nabla m_{k+1}(0)$? Que peut-on dire de m_{k+1} ?

5. Montrer que H_{k+1} est symétrique définie positive si H_k l'est.

6. Écrire l'algorithme quasi-Newton BFGS, en prenant x_0 quelconque et $H_0 = I_n$.
Évaluer le nombre d'opérations nécessaires pour une itération de l'algorithme.
Comparer à la méthode de Newton.

Exercice 2

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $g(x) = -\sum_{i=1}^{m} \ln\Big(-\frac{1}{2}\, x^t\, A_i\, x - < b_i, x > - c_i\Big)$,
où, pour tout $1 \leq i \leq m$:
A_i est une matrice carrée d'ordre n, symétrique définie positive, $b_i \in \mathbb{R}^n$ et $c_i \in \mathbb{R}$.

1. Donner le domaine de définition de g, $\mathrm{dom}(g)$.

2. Calculer $\nabla g(x)$.

3. Écrire la méthode de descente de gradient adaptée à la minimisation de g sur $\mathrm{dom}(g)$, en langage Scilab ou en langage algorithmique.
   On prendra soin de faire tous les tests nécessaires à la bonne exécution de l'algorithme !

4. Exemple : $n = 2$, $m = 2$,
   $A_1 = I_2$, $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_1 = -2$; $\quad A_2 = 2I_2$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_2 = -3$.

   Déterminer et tracer $\mathrm{dom}(g)$.

   Donner une interprétation géométrique de la minimisation de g sur $\mathrm{dom}(g)$.

   En déduire, grâce à la symétrie du problème, x^* tel que $g(x^*) = \min_{x \in \mathrm{dom}(g)} f(x)$.

Exercice 3

On considère la fonction `Scilab` suivante :

```
function [B,C]=toto(A)
B=chol(A)
[U,S,V]=svd(A)
C=U*sqrt(S)*V'
endfunction
```

où `A` est une matrice (n, n) symétrique définie positive.

1. Que donne l'appel `[B,C]=toto( diag([1:5]) )` ?

2. Quelle relation simple existe entre A et C ?

3. Que se passe-t-il si A n'est pas symétrique définie positive ?