Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

MASTER 2009–2010

Optimisation et Algorithmique

EXAMEN, durée 2h

Tout document est interdit. Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.
Nombre de pages de l'énoncé : 2
Il faut justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Exercice 1
Pour $\gamma \geq 1$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on définit $g(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \gamma x_2^2)$.

On pose pour toute la suite $x^{(0)} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer x^*, le minimum de g sur $\mathbb{R}^2$.
   Tracer les lignes de niveau de g pour $\gamma = 1$ et pour $\gamma = 8$. Placez à chaque fois x^* et $x^{(0)}$.
   Donner une interprétation géométrique de γ.
2. Rappeler la formule qui exprime $x^{(k+1)}$ en fonction de $x^{(k)}$ par l'algorithme de descente de gradient pour la fonction g.
3. Calculer la direction de descente $d^{(0)}$ en $x^{(0)}$ et le pas de descente optimal σ_0.
   En déduire $x^{(1)}$.
4. Calculer $d^{(1)}$, σ_1 et $x^{(2)}$.
5. Généraliser et montrer que $x^{(k)} = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^k \begin{pmatrix} \gamma \\ (-1)^k \end{pmatrix}$.
6. Que vaut $< \nabla g(x^{(k+1)}), \nabla g(x^{(k)}) >$?
7. Que pouvez vous dire sur la convergence de l'algorithme ? sur le nombre d'itérations nécessaires ?
8. Combien d'itérations nécessite la méthode de Newton à partir de $x^{(0)}$? Justifiez.

Exercice 2 Soit $c \in \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{R}^n$ et B une matrice réelle, symétrique, définie positive de taille (n, n).
On définit la fonction quadratique f, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = c + g^t\, x + \frac{1}{2} x^t\, B\, x\ .$$

1. Calculer $\nabla f(x)$ et $H_f(x)$.
2. Montrer que f admet un minimum unique x^B sur $\mathbb{R}^n$. Calculer x^B.
3. On pose $x^g = -\dfrac{g^t\, g}{g^t\, Bg}\, g$.
   Vérifier que x^g est le minimum de f dans la direction $-g$, en partant du point $x = O \in \mathbb{R}^n$.

On s'intéresse à une solution approximative du problème avec contraintes :

$$(*) \qquad x^*(\Delta) = \underset{x, \|x\|_2 < \Delta}{\arg\min} f(x)\,, \qquad \text{pour } \Delta > 0 \text{ donné}\,.$$

grâce à la méthode « Dogleg ».
Pour cela, on va approximer la courbe $\{x^*(\Delta), \Delta > 0\}$ grâce à deux segments :

$$x^D(\alpha) = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha\, x^g & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ x^g + (\alpha - 1)(x^B - x^g) & 1 \leq \alpha \leq 2 \end{array} \right.$$

4. Tracer $x^D(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 2$.

5. Vérifier que $\alpha \mapsto \|x^D(\alpha)\|$ est croissante et $\alpha \mapsto f(x^D(\alpha))$ est décroissante pour $\alpha \in [0,1]$.

6. Pour $\beta \in [0,1]$, on pose $d(\beta) = \frac{1}{2}\|x^D(1+\beta)\|^2$ et $v(\beta) = f(x^D(1+\beta))$.
   Calculer $d'(\beta)$ et $v'(\beta)$.
   Montrer que $d'(\beta) \geq 0$ et $v'(\beta) \leq 0$ sur $[0,1]$.
   (Indic. : on pourra admettre que $(g^t\, g)^2 \leq (g^t\, Bg)(g^t\, B^{-1} g)$)

7. Déduire de ce qui précède que $x^D(\alpha) \cap C(0,\Delta)$ est vide ou réduit à un point.
   Calculer le point intersection de $x^D(\alpha)$ et $C(0,\Delta)$ en fonction de $\Delta > 0$.

8. Déduire un algorithme pour résoudre le problème $x^D(\alpha^*) = \underset{\alpha, \|x^D(\alpha)\|_2 < \Delta}{\arg\min} f(x^D(\alpha))$.
   Discutez le lien avec le problème initial $(*)$.