Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

MASTER I IM/MA 2013–2014

Optimisation et Algorithmique

EXAMEN, durée 2h

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.
Nombre de pages de l'énoncé : 2
Il faut justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Exercice 1

Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on définit $f(x) = \dfrac{1}{2}(x_1^2 + \gamma x_2^2)$, où $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$
et, pour $\sigma > 0$, $x, d \in \mathbb{R}^2$, l'on pose $\varphi(\sigma) = f(x + \sigma d)$

1. Calculer $\nabla f(x)$ et $H_f(x)$. Dans quel cas la fonction f admet-elle un minimum unique sur $\mathbb{R}^2$. Quel est ce minimum x^* ?
   On se placera dans toute la suite dans le cas d'un minimum unique.

2. On construit la suite $(x^{(k)})_{k\geq 0}$ de la façon suivante :
$$(R) \begin{cases} {x_1}^{(k+1)} &= {x_1}^{(k)} - \sigma_k \, {x_1}^{(k)} \\ {x_2}^{(k+1)} &= {x_2}^{(k)} - \sigma_k \, \gamma {x_2}^{(k)} \end{cases} .$$
   où σ_k vérifie $< \nabla f\Big(x^{(k)} - \sigma_k \, \nabla f(x^{(k)})\Big), \nabla f(x^{(k)}) > = 0$.
   Déduire de cette équation la valeur de σ_k. Calculer ensuite $\varphi'(\sigma_k)$.
   Quel algorithme connu obtient-on alors par la récurrence (R) ?

   Pour toute la suite on suppose que $x^{(0)} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Montrer alors que $x^{(k)} = \left(\dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)^k \begin{pmatrix} \gamma \\ (-1)^k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$.

4. Que peut-on dire de $\nabla f(x^{(k)})$ et $\nabla f(x^{(k+1)})$? de $\lim\limits_{k\to+\infty} x^{(k)}$?

5. Calculer $\|x^* - x^{(k+1)}\|_2$ et l'exprimer en fonction de $\|x^* - x^{(k)}\|_2$.
   Que peut-on dire sur la vitesse de convergence de l'algorithme ? du nombre d'itérations ?

6. Écrire l'algorithme de Newton appliqué à la fonction f. On note $\tilde{x}^{(k)}$ le point déterminé par l'algorithme à la k-ième itération, en partant de $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$.

7. Sous quelle(s) condition(s) peut-on appliquer l'algorithme de Newton pour minimiser la fonction f ?
   Montrer que la méthode de Newton converge en une itération et ceci indépendamment de $x^{(0)}$. Expliquez.

Exercice 2

Soit $d \geq 2$. On s'intéresse au problème suivant

$$x^* = \underset{x \in \mathrm{dom}(f)}{\arg\min}\, f(x), \qquad \text{où} \qquad f(x) = -\log\left(1 - \sum_{i=1}^{d} x_i^2\right) - \sum_{i=1}^{d} \log(x_i) \quad \text{et} \quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d.$$

On admet que la fonction f est strictement convexe et a donc un minimum unique $x^* \in \mathrm{dom}(f)$.

1. Déterminez le domaine de f, $\mathrm{dom}(f)$. Faites une représentation graphique pour $d = 2$.

2. Montrer que minimiser f sur $\mathrm{dom}(f)$ revient à maximiser le polynôme $P(x) = \left(\prod_{i=1}^{d} x_i\right)\left(1 - \sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)$ sous contraintes.

   Déduire une interprétation géométrique du problème de minimisation de f.
   Utiliser la symétrie du problème pour déterminer x^*. Reportez ce point dans le graphe de $\mathrm{dom}(f)$ fait pour $d = 2$.

3. Que calculent les fonctions Scilab suivantes ? Justifiez.

```
function [a]=toto_1(b)
  a = -log(1-sum(b.^2)) - sum(log(b)) ;
endfunction

function [a]=toto_2(b)
  a = (2*b)./(1-sum(b.^2)) -  (1)./b ;
endfunction
```

4. On pose $\varphi(s) = f(x + sv)$, où $x, v \in \mathbb{R}^d$ et $s \in \mathbb{R}_+$. Que vaut $\varphi'(s)$?
   Écrire la fonction Scilab `function [t]=d_phi(s,x,v)` qui évalue $\varphi'(s)$.

5. Donner l'algorithme de descente de gradient appliqué à la minimisation de f sur $\mathrm{dom}(f)$.
   (On pourra écrire du pseudo-code et/ou utiliser les fonctions du 3 et 4).