UFR
DE MATHÉMATIQUES
ET INFORMATIQUE

UNIVERSITÉ
PARIS
DESCARTES

MASTER 1 INFO 2017–2018

Optimisation Algorithmique

Polycopié et notes autorisés. Durée 1h15.

Fichiers disponibles :

1. Cours, fiches de TD/TP et corrigé des TP dans le répertoire COURS_TP ;
2. dans le répertoire SCILAB le polycopié Scilab ;
3. les fichiers CC_Ex1.sci, CC_Ex1.sce, CC_Ex2.sci et CC_Ex2.sce sont à compléter et contiennent déjà une partie de code à utiliser.

À remettre :

1. les fichier `CC_Ex1.sci`, `CC_Ex1.sce`, `CC_Ex2.sci` et `CC_Ex2.sce` des fonctions respectivement des commandes Scilab avec votre nom en commentaire ;
2. la copie double sur laquelle vous pouvez expliquer ce que vous avez fait : calculs, formules, graphiques, problèmes rencontrés,. . .

Exercice 1
Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on définit $f(x) = 40x_1^2 + (2x_2 - 1)^2$.

1. Calculer $\nabla f(x)$ et $H_f(x)$. En déduire que f peut s'écrire comme une fonction quadratique que l'on précisera.
2. Déterminer la position du minimum `x_min` et la valeur $f($`x_min`$)=$`v_min`.
   La valeur de `v_min` sera utilisée pour le test d'arrêt et l'évaluation de la vitesse de convergence.
3. Compléter les lignes d'exécution dans le fichier `CC_Ex1.sce` et le test d'arrêt dans `CC_Ex1.sci` .
4. En choisissant les quatre valeurs initiales suivantes illustrer le comportement de convergence de la méthode de descente du gradient.
   $$x_1{}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; x_2{}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{21}{22} \\ -\frac{1}{22} \end{pmatrix} \; ; x_3{}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; x_4{}^{(0)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{22} \\ \frac{21}{22} \end{pmatrix} \; .$$
   On tracera : lignes de niveaux, parcours de la suite $(x^{(k)})_k$, précision du résultat,. . . dans chaque cas. Commentez.

Exercice 2
On s'intéresse à la minimisation de la fonctionnelle coût : $f(x) = -\sum_{i=1}^{m} \log\Big(b_i - < a_i, x >\Big)$
où $x \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1 \cdots b_p)^t \in \mathcal{M}(p, 1)$ et on note A la matrice formé à partir des vecteurs $a^k \in \mathbb{R}^n$: $A = (a^1\, a^2 \cdots a^p)^t \in \mathcal{M}(p, n)$.

1. Écrire la fonction $f(x_1, x_2)$ qui est codée dans le fichier `CC_Ex2.sce`. On note `x_min`$\in \mathbb{R}^2$ la position du minimum de f. Si l'on sait que `x_min(1)`$= \frac{1}{3}$, pourquoi `x_min(2)`$= \frac{1}{3}$?
2. Compléter les lignes d'exécution dans le fichier `CC_Ex2.sce` afin de pouvoir tester et comparer les différentes méthodes implémentées dans les fonctions du fichier `CC_Ex2.sci` sur l'exemple numérique proposé : lignes de niveaux, parcours de la suite $(x^{(k)})_k$, précision du résultat,. . .
   Choisisez différentes valeurs pour $x^{(0)}$ et commentez les résultats.