MASTER 1 INFO 2019–2020

Optimisation Algorithmique

Contrôle du 27 novembre 2019, durée 1h30

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.
Nombre de pages de l'énoncé : 2
Il faut justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Questions de cours

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, on note $\nabla f(x)$ le gradient de f au point x et $H_f(x)$ la matrice hessienne de f en $x \in \mathbb{R}^2$.
On suppose qu'il existe un minimum unique $x^* = \arg\min_x f(x)$ et l'on note $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} = \left({x_1}^{(k)}, {x_2}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^2$ qui converge vers $x^* \in \mathbb{R}^2$ quand k tend vers l'infini.

1. Donner l'algorithme de descente de gradient appliqué à la fonction f (pseudo code).
   (Bien définir tous les éléments utilisées).

2. Donner l'algorithme de Newton appliqué à la fonction f (pseudo code).
   (Bien définir tous les éléments utilisées).

3. Comparez les deux méthodes (convergence, vitesse,...).

Exercice 1

On s'intéresse à

$$x^* = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x) \quad \text{où } f(x) = f(x_1, x_2) = -\Big(\log\left(1 - (x_1^2 + x_2^2)\right) + \log(x_1) + \log(x_2)\Big)$$

1. Déterminez le domaine de f, $\mathrm{dom}(f)$. Faites une représentation graphique de $\mathrm{dom}(f)$.

2. Calculer $\nabla f(x)$ et déterminer les points critiques.
   En déduire x^* et $v^* = f(x^*)$.

3. Comment faut-il adapter les quatre (4) méthodes de descente vues en cours pour pouvoir les appliquer à la minimisation de f sur $\mathrm{dom}(f)$.

4. Que calculent les fonctions Octave suivantes ? Expliquez.

```
function [a]=toto_1(b)
  a = -log(1-sum(b.^2)) - sum(log(b)) ;
endfunction

function [a]=toto_2(b)
  a = (2*b)./(1-sum(b.^2)) -  1./b ;
endfunction
```

5. Montrer que minimiser f sur $\mathrm{dom}(f)$ revient à maximiser, sous contraintes, un polynôme $P(x_1, x_2$ que l'on donnera.

Exercice 2

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par : $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i e^{x_i}$, où $a_i \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq n$.

1. Calculer $\nabla f(x)$ et $H_f(x)$.

2. Que peut-on dire du problème $x^* = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\arg\min} f(x)$?

3. Quel résultat va donner l'appel à une fonction de minimisation de f par la méthode de descente de gradient pour $x0 = [0...0]'$?